



Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών
"Προηγμένες Τεχνολογίες Υπολογιστών
και Πληροφορικής"

Υπολογιστική Νοημοσύνη

Μάθημα 8^ο

Δρ. Βασίλειος Γ. Καμπουρλάζος
Δρ. Ανέστης Γ. Χατζημιχαηλίδης

Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής Τ.Ε.
ΤΕΙ Ανατολικής Μακεδονίας και Θράκης

2017-2018

Περιεχόμενα

Μια Ενοποιητική Προσέγγιση στην ΥΝ

- Η Θεωρία Πλεγμάτων στην ΥΝ.
- Υπολογιστικές Μεθοδολογίες σε Πλέγματα.
- Αριθμοί Διαστημάτων.

Υπολογιστικές Μεθοδολογίες σε Πλέγματα

- Λογική και Συλλογιστική.
- Τυποποιημένη Ανάλυση Εννοιών.
- Μαθηματική Μορφολογία.
- Συγκριτικά Σχόλια.

Λογική και Συλλογιστική

- ❖ **Σύζευξη** δύο προτάσεων P, Q ονομάζουμε την πρόταση « P και Q » ($P \wedge Q$), η οποία είναι αληθής όταν και οι δύο προτάσεις P, Q είναι αληθείς και ψευδής σε οποιαδήποτε άλλη περίπτωση.
 $\wedge : \{0,1\} \times \{0,1\} \rightarrow \{0,1\}$
- ❖ Μια διμελής πράξη i στο $[0,1]$ καλείται **ασαφής σύζευξη** (*fuzzy intersection*), εάν είναι μια επέκταση της κλασικής σύζευξης. Δηλαδή, αν ισχύει:
 $i(x,y) \in [0,1], \forall x,y \in [0,1]$
και
 $i(0,0) = i(0,1) = i(1,0) = 0, i(1,1) = 1$

(Λογική και Συλλογιστική)

- ❖ Μια ασαφής σύζευξη $T:[0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ καλείται ***t-norm*** (**τριγωνική νόρμα - *triangular norm***) αν ικανοποιεί, κατ'ελάχιστο, τις παρακάτω ιδιότητες, $\forall x,y,z \in [0,1]$.
- ⊙ Δ1. $T(x,1)=x$ (συνοριακή συνθήκη)
 - ⊙ Δ2. $T(x,y) \leq T(x,z)$ εάν $y \leq z$ (μονότονη)
 - ⊙ Δ3. $T(x,y) = T(y,x)$ (αντιμεταθετική)
 - ⊙ Δ4. $T(x, T(y,z)) = T(T(x,y),z)$ (προσεταιριστική)

(Λογική και Συλλογιστική)

❖ Παραδείγματα *t-norms*

- ⊙ $T_1(x,y) = \min(x,y)$ (συνήθης)
- ⊙ $T_2(x,y) = xy$ (αλγεβρικό γινόμενο)
- ⊙ $T_3(x,y) = \max(0, x+y-1)$ (φραγμένη διαφορά)
- ⊙ $T_4(x,y) = \begin{cases} x, & \text{αν } y = 1 \\ y, & \text{αν } x = 1 \\ 0, & \text{οπουδήποτε αλλού} \end{cases}$ (δραστική)

❖ Έστω μια *t-norm* T τότε: $T_4 \leq T \leq T_1$

(Λογική και Συλλογιστική)

- ❖ **Διάζευξη** δύο προτάσεων P, Q ονομάζουμε την πρόταση « P ή Q » ($P \vee Q$), η οποία είναι ψευδής όταν και οι δύο προτάσεις P, Q είναι ψευδείς και αληθής σε οποιαδήποτε άλλη περίπτωση.

$$\vee : \{0,1\} \times \{0,1\} \rightarrow \{0,1\}$$

(Λογική και Συλλογιστική)

- ❖ Οι πλέον δημοφιλείς ασαφείς διαζεύξεις είναι οι γνωστές ως “*t-conorms*” (τριγωνικές συ-νόρμες).
- ❖ Μια διμελής πράξη $S:[0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ καλείται *t-conorm* αν ικανοποιεί, κατ’ ελάχιστο, τις παρακάτω ιδιότητες, $\forall x,y,z \in [0,1]$.
 - ⊙ Δ1. $S(x,0)=x$ (συνοριακή συνθήκη)
 - ⊙ Δ2. $S(x,y) \leq S(x,z)$ εάν $y \leq z$ (μονότονη)
 - ⊙ Δ3. $S(x,y) = S(y,x)$ (αντιμεταθετική)
 - ⊙ Δ4. $S(S(x,y),z) = S(x, S(y,z))$ (προσεταιριστική)

(Λογική και Συλλογιστική)

❖ Παραδείγματα *t-conorms*

- ⊙ $S_1(x,y) = \max(x,y)$ (συνήθης)
- ⊙ $S_2(x,y) = x+y-xy$ (αλγεβρικό άθροισμα)
- ⊙ $S_3(x,y) = \min(1, x+y)$ (φραγμένο άθροισμα)
- ⊙ $S_4(x,y) = \begin{cases} x, & \text{αν } y = 0 \\ y, & \text{αν } x = 0 \\ 1, & \text{οπουδήποτε αλλού} \end{cases}$ (δραστική)

❖ Έστω μια *t-conorm* S τότε: $S_1 \leq S \leq S_4$

(Λογική και Συλλογιστική)

- ❖ **Άρνηση** μιας πρότασης P ονομάζουμε την πρόταση «όχι P » ($\neg P$) η οποία είναι αληθής όταν η P είναι ψευδής και ψευδής όταν η P είναι αληθής.
- ❖ Η **ασαφής άρνηση / ασαφές συμπλήρωμα (fuzzy negation / fuzzy complement)** είναι μια συνάρτηση $n:[0,1] \rightarrow [0,1]$ που ικανοποιεί, κατ' ελάχιστο, τις παρακάτω δύο προϋποθέσεις:
 - ⊙ η συνάρτηση n είναι φθίνουσα,
 - ⊙ $n(0)=1, n(1)=0$.

(Λογική και Συλλογιστική)

- ❖ Μια συνάρτηση $n:[0,1] \rightarrow [0,1]$ καλείται **ισχυρή (ασαφής) άρνηση (strong negation)** εάν πληροί τις παρακάτω προϋποθέσεις:
 - ⊙ η συνάρτηση n είναι συνεχής,
 - ⊙ η συνάρτηση n είναι γνησίως φθίνουσα,
 - ⊙ $n(0)=1$ και $n(1)=0$,
 - ⊙ $n(n(x))=x, \forall x \in [0,1]$.

(Λογική και Συλλογιστική)

- ❖ Παραδείγματα ασαφών αρνήσεων
- ⊙ κλάση **Sugeno**: $n(x) = (1 - x) / (1 + ax)$, $\forall x \in [0, 1]$, όπου η παράμετρος $a \in (-1, +\infty)$.
- ⊙ κλάση **Yager**: $n(x) = (1 - x^a)^{1/a}$, $\forall x \in [0, 1]$ και $a \in (0, +\infty)$.

(Λογική και Συλλογιστική)

- ❖ **Συνεπαγωγή** δύο προτάσεων P, Q , ονομάζουμε την πρόταση “αν P τότε Q ” ($P \Rightarrow Q$), η οποία είναι ψευδής όταν η P είναι αληθής και η Q ψευδής και αληθής σε κάθε άλλη περίπτωση.
- ❖ Η **ασαφής συνεπαγωγή (fuzzy implication)** είναι μια απεικόνιση $I: [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ που ικανοποιεί τον πίνακα τιμών αλήθειας της κλασικής συνεπαγωγής όταν το διάστημα $[0,1]$ περιορισθεί στο σύνολο $\{0,1\}$.

(Λογική και Συλλογιστική)

❖ Οι παρακάτω ιδιότητες των ασαφών συνεπαγωγών είναι γενικεύσεις ιδιοτήτων της κλασικής συνεπαγωγής (συχνά αναφέρονται και ως “λογικά αξιώματα” των ασαφών συνεπαγωγών):

- $x \leq y \Rightarrow I(x,z) \geq I(y,z)$ (μονοτονία πρώτου ορίσματος)
- $x \leq y \Rightarrow I(z,x) \leq I(z,y)$ (μονοτονία δεύτερου ορίσματος)
- $I(0,x) = 1$ (υπεροχή της «ψευδής»)
- $I(1,y) = y$ (ουδετερότητα της «αληθής»)
- $I(x,x) = 1$ (ταυτοτική)
- $I(x, I(y,z)) = I(y, I(x,z))$ (εναλλαγή)
- $I(x,y) = 1$ αν και μόνο αν $x \leq y$ (συνοριακή συνθήκη)
- $I(x,y) = I(\mathbf{n}(y), \mathbf{n}(x))$ (αντιθετοαντιστροφή)
- η I είναι συνεχής συνάρτηση (συνέχεια)

(Λογική και Συλλογιστική)

Ορισμός *ασαφούς συνεπαγωγής* σύμφωνα με τους *Fodor* και *Roubens*:

- ❖ *Ασαφής συνεπαγωγή* είναι μια απεικόνιση $I: [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ που ικανοποιεί τον λογικό πίνακα της κλασικής συνεπαγωγής όταν το $[0,1]$ περιορίζεται στο $\{0,1\}$ και επιπλέον ικανοποιεί τις ιδιότητες:
 - $x \leq y \Rightarrow I(x,z) \geq I(y,z)$
 - $x \leq y \Rightarrow I(z,x) \leq I(z,y)$
 - $I(0,x) = 1$
 - $I(x,1) = 1$

(Λογική και Συλλογιστική)

- ❖ Στη κλασική (δίτιμη) λογική, η λογική ισοδυναμία

$$a \Rightarrow b \equiv \neg a \vee b, \forall a, b \in \{0,1\} \quad (1)$$

μπορεί να εκφρασθεί ισοδύναμα ως:

$$a \Rightarrow b \equiv \max\{x \in \{0,1\} \mid a \wedge x \leq b\} \quad (2)$$

$$a \Rightarrow b \equiv \neg a \vee (a \wedge b) \quad (3)$$

(Λογική και Συλλογιστική)

- ❖ Οι επεκτάσεις των παραπάνω σχέσεων (1), (2), και (3) στην ασαφή λογική είναι, $\forall a, b \in [0,1]$, αντίστοιχα:

$$I_S(a,b) = \mathbf{S}(\mathbf{n}(a), b) \quad (1')$$

$$I_R(a,b) = \sup\{x \in [0,1] \mid \mathbf{T}(a, x) \leq b\} \quad (2')$$

$$I_{QL}(a,b) = \mathbf{S}(\mathbf{n}(a), \mathbf{T}(a,b)) \quad (3')$$

(Λογική και Συλλογιστική)

- ❖ Στους τύπους (1'), (2') και (3'), οι **S** και **T** είναι δυικές σε σχέση με την **n**. Δηλαδή, $\forall a, b \in [0,1]$ ισχύει:

$$\mathbf{S}(a,b) = \mathbf{n}(\mathbf{T}(\mathbf{n}(a),\mathbf{n}(b))) \quad \text{και} \quad \mathbf{T}(a,b) = \mathbf{n}(\mathbf{S}(\mathbf{n}(a),\mathbf{n}(b)))$$

(*Νόμοι De Morgan*)

(Λογική και Συλλογιστική)

❖ Παραδείγματα S-ασαφών συνεπαγωγών

- ⊙ Επιλέγοντας για t -conorm την \max , προκύπτει η ασαφής συνεπαγωγή:

$$I_s(a,b) = \max(1-a, b) \quad (\text{Kleene-Dienes})$$

- ⊙ Επιλέγοντας για t -conorm το «φραγμένο άθροισμα», προκύπτει η ασαφής συνεπαγωγή:

$$I_s(a,b) = \min(1, 1-a+b) \quad (\text{Łukasiewicz})$$

(Λογική και Συλλογιστική)

❖ Παραδείγματα R-ασαφών συνεπαγωγών

- Επιλέγοντας για *t-norm* την *min*, προκύπτει η ασαφής συνεπαγωγή:

$$I_R(a,b) = \begin{cases} 1, & \text{όταν } a \leq b \\ b, & \text{όταν } a > b \end{cases} \quad (\text{Gödel})$$

- Επιλέγοντας για *t-norm* την φραγμένη διαφορά, προκύπτει η ασαφής συνεπαγωγή:

$$I_R(a,b) = \min(1, 1-a+b) \quad (\text{Łukasiewicz})$$

(Λογική και Συλλογιστική)

❖ Παραδείγματα QL- ασαφών συνεπαγωγών

- Επιλέγοντας για t -norm την \min και για t -conorm την \max προκύπτει η ασαφής συνεπαγωγή:

$$I_{QL}(a,b) = \max[1-a, \min(a,b)] \quad (\text{Zadeh})$$

- Επιλέγοντας για t -norm το αλγεβρικό γινόμενο και για t -conorm το αλγεβρικό άθροισμα προκύπτει η ασαφής συνεπαγωγή:

$$I_{QL}(a,b) = 1 - a + a^2b$$

(Λογική και Συλλογιστική)

❖ Άσκηση

Δίνεται ο βαθμός διάταξης $\sigma_v(a,b) = v(b) / v(a \vee b)$, όπου $a \in [0,1]$ και $b \in (0,1]$. Θέτουμε $v(x) = x$ και ορίζουμε $\sigma_v(a,b) = 1$ όταν $a = b = 0$.

- i) Να δειχθεί ότι η σ_v είναι μια ασαφής συνεπαγωγή.
- ii) Η σ_v είναι ασαφής συνεπαγωγή σύμφωνα με τον ορισμό των *Fodor* και *Roubens* ?
- ii) Ποια από τα “λογικά αξιώματα” των ασαφών συνεπαγωγών (και με ποιες προϋποθέσεις) ικανοποιεί ?

(Λογική και Συλλογιστική)

- ❖ Έστω $(\mathbf{L}, \vee, \wedge, 0, 1)$ ένα πλήρες πλέγμα με ελάχιστο και μέγιστο στοιχείο τα 0 και 1 , αντίστοιχα. Έστω “ ’ ” μια συνάρτηση δυϊκού ισομορφισμού, και έστω μια συνάρτηση $\rightarrow : \mathbf{L} \times \mathbf{L} \rightarrow \mathbf{L}$

Η δομή $(\mathbf{L}, \vee, \wedge, ', 0, 1)$ καλείται *άλγεβρα συνεπαγωγών πλέγματος (lattice implication algebra)*, εάν ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες $\forall x, y, z \in \mathbf{L}$:

(Λογική και Συλλογιστική)

- ⊙ (I1) $x \rightarrow (y \rightarrow z) = y \rightarrow (x \rightarrow z)$
- ⊙ (I2) $x \rightarrow x = I$
- ⊙ (I3) $x \rightarrow y = y' \rightarrow x'$
- ⊙ (I4) Εάν $x \rightarrow y = y \rightarrow x = I$ τότε $x = y$
- ⊙ (I5) $(x \rightarrow y) \rightarrow y = (y \rightarrow x) \rightarrow x$
- ⊙ (L1) $(x \vee y) \rightarrow z = (x \rightarrow z) \wedge (y \rightarrow z)$
- ⊙ (L2) $(x \wedge y) \rightarrow z = (x \rightarrow z) \vee (y \rightarrow z)$

(Λογική και Συλλογιστική)

❖ Παράδειγμα

Έστω $(\mathbf{L}, \vee, \wedge, ')$ ένα πλέγμα Boole.

Ορίζουμε τη πράξη \rightarrow ως εξής: $x \rightarrow y \equiv x' \vee y, \forall x, y \in \mathbf{L}$.

Η δομή $(\mathbf{L}, \vee, \wedge, ', \rightarrow)$ είναι άλγεβρα συνεπαγωγών πλέγματος

(Λογική και Συλλογιστική)

❖ Παράδειγμα

Έστω $L = [0,1]$, με πράξεις $\vee, \wedge, ' ,$ και \rightarrow που ορίζονται $\forall x,y,z \in L$ ως εξής:

$$x \vee y = \max \{x, y\},$$

$$x \wedge y = \min \{x, y\},$$

$$x' = 1 - x$$

$$x \rightarrow y = \min\{1, 1 - x + y\}.$$

Η δομή $([0,1], \vee, \wedge, ', \rightarrow, 0, 1)$ είναι μια *άλγεβρα συνεπαγωγών πλέγματος*, γνωστή και ως *άλγεβρα Łukasiewicz* πάνω στο διάστημα $[0,1]$.

(Λογική και Συλλογιστική)

❖ Παράδειγμα

Έστω $\mathbf{L} = \{a_i \mid i=1,2,\dots,n\}$, με πράξεις $\vee, \wedge, ', \rightarrow$ που ορίζονται για κάθε $1 \leq j, k \leq n$, ως εξής:

$$a_j \vee a_k = a_{\max\{j,k\}} \quad a_j \wedge a_k = a_{\min\{j,k\}}$$

$$(a_j)' = a_{n-j+1} \quad a_j \rightarrow a_k = a_{\min\{n-j+k,n\}}$$

Η δομή $(\mathbf{L}, \vee, \wedge, ', \rightarrow, a_1, a_n)$ είναι μια άλγεβρα συνεπαγωγών πλέγματος και μια άλγεβρα Łukasiewicz πάνω στην πεπερασμένη αλυσίδα a_1, a_2, \dots, a_n .

Τυποποιημένη Ανάλυση Εννοιών

- ❖ Η *τυποποιημένη ανάλυση εννοιών* (ΤΑΕ) (*formal concept analysis* (FCA)) είναι μια επιστημονική μεθοδολογία που συνήθως μελετά έναν πίνακα συμφραζόμενων.
- ❖ Το σύνολο των τυποποιημένων εννοιών σε μια τριάδα τυποποιημένων συμφραζόμενων είναι ένα πλήρες πλέγμα.
- ❖ Εφαρμογές της ΤΑΕ συχνά προτείνονται για *ανάκτηση* (*retrieval*) πληροφοριών σε *βάσεις δεδομένων* (*data bases*).

Μαθηματική Μορφολογία

- ❖ Η εφαρμογή τεχνικών MM τυπικά μεθοδεύεται κάνοντας χρήση ενός δισδιάστατου **δομικού στοιχείου** (*structure element*), το οποίο σαρώνει μια ψηφιακή εικόνα εφαρμόζοντας τους τελεστές:
διαστολή (*dilation*),
διάβρωση (*erosion*),
άνοιγμα (*opening*),
κλείσιμο (*closing*),
με σκοπό να απομακρύνει θόρυβο από την εικόνα ή / και να ταυτοποιήσει ενδιαφέροντα **πρότυπα** (*patterns*) πάνω στην εικόνα.

(Μαθηματική Μορφολογία)

- ❖ Δοθέντων δύο πλήρων πλεγμάτων (L, \sqsubseteq) και (M, \sqsubseteq) οι τελεστές διάβρωση $\varepsilon: L \rightarrow M$ και διαστολή $\delta: L \rightarrow M$ ορίζονται αντίστοιχα ως: $\varepsilon(\wedge M) = \wedge \varepsilon(M)$ και $\delta(\vee M) = \vee \delta(M)$, όπου $\varepsilon(M)$ και $\delta(M)$ συμβολίζουν τα σύνολα $\{\varepsilon(a) \mid a \in M\}$ και $\{\delta(a) \mid a \in M\}$, αντίστοιχα.
- ❖ Οι πράξεις διαστολή και διάβρωση είναι δυϊκά συμπληρωματικές.
Η διαστολή ενός συνόλου ισοδυναμεί με τη διάβρωση του συμπληρώματος του συνόλου, με δομικό στοιχείο το ανάστροφο δομικό στοιχείο.

Συγκριτικά Σχόλια

- ❖ Από τις τρεις μεθοδολογίες χρήσης μαθηματικών πλεγμάτων που παρουσιάστηκαν η *Μαθηματική Μορφολογία*, προς το παρόν, έχει την μεγαλύτερη συνάφεια με την ΥΝ.
- ❖ Η *Λογική / Συλλογιστική* και η *Τυποποιημένη Ανάλυση Εννοιών* βασίζονται στο σημασιολογικό ορισμό πλέγματος και κάνουν χρήση κυρίως της δυαδικής σχέσης μερική διάταξη, ενώ η *Μαθηματική Μορφολογία* βασίζεται στον αλγεβρικό ορισμό πλέγματος και κάνει χρήση κυρίως των δυαδικών πράξεων συνένωση και διατομή.

Στοιχεία Επικοινωνίας

Δρ. Ανέστης Γ. Χατζημιχαηλίδης

email: hatzane@teiemt.gr

Τηλ. 693-815-1768

ΕΥΧΑΡΙΣΤΩ