



Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών
"Προηγμένες Τεχνολογίες Υπολογιστών
και Πληροφορικής"

Υπολογιστική Νοημοσύνη

Μάθημα 7β

Δρ. Βασίλειος Γ. Καμπουρλάζος
Δρ. Ανέστης Γ. Χατζημιχαηλίδης

Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής Τ.Ε.
ΤΕΙ Ανατολικής Μακεδονίας και Θράκης

2017-2018

Περιεχόμενα

Μια Ενοποιητική Προσέγγιση στην ΥΝ

- Η Θεωρία Πλεγμάτων στην ΥΝ.
- Υπολογιστικές Μεθοδολογίες σε Πλέγματα.
- Αριθμοί Διαστημάτων.

Η Θεωρία Πλεγμάτων στην ΥΝ

- Ασαφή Πλέγματα.
- Επεκτάσεις σε Ιεραρχίες Πλεγμάτων.
- Ενοποίηση Ανόμοιων Τύπων Δεδομένων.

Ασαφή Πλέγματα

- ❖ *Ασαφές πλέγμα (fuzzy lattice)* καλείται μια τριάδα $(\mathbf{L}, \sqsubseteq, \mu)$, όπου $(\mathbf{L}, \sqsubseteq)$ είναι ένα πλέγμα και $(\mathbf{L} \times \mathbf{L}, \mu)$ είναι ένα ασαφές σύνολο τέτοιο, ώστε $\mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 1$, εάν και μόνο εάν $\mathbf{x} \sqsubseteq \mathbf{y}$.
- ❖ Το ασαφές πλέγμα $(\mathbf{L}, \sqsubseteq, \mu)$ ασαφοποιεί τη δυαδική σχέση της διάταξης στο πλέγμα $(\mathbf{L}, \sqsubseteq)$.

(Ασαφή Πλέγματα)

- ❖ Έστω ένα πλέγμα (L, \sqsubseteq) . Ως (ασαφής) βαθμός διάταξης (*fuzzy order*) ορίζεται μια συνάρτηση $\sigma: L \times L \rightarrow [0, 1]$ η οποία ικανοποιεί τις παρακάτω δύο ιδιότητες:
 - ⊙ C1. $u \sqsubseteq w \Leftrightarrow \sigma(u, w) = 1$.
 - ⊙ C2. $u \sqsubseteq w \Rightarrow \sigma(x, u) \leq \sigma(x, w)$. (Συνέπεια)

(Ασαφές Πλέγματα)

- ❖ Έστω ένα πλέγμα $(\mathbf{L}, \sqsubseteq)$ με βαθμό διάταξης $\sigma: \mathbf{L} \times \mathbf{L} \rightarrow [0, 1]$. Τότε η τριάδα $(\mathbf{L}, \sqsubseteq, \sigma)$ είναι ένα ασαφές πλέγμα.
- ❖ Η χρησιμότητα της ύπαρξης ενός βαθμού διάταξης (σ) στο πλέγμα $(\mathbf{L}, \sqsubseteq)$ είναι ότι μετασχηματίζει το $(\mathbf{L}, \sqsubseteq)$ σε ασαφές πλέγμα. Έτσι επιτρέπει την ποσοτικοποιημένη σύγκριση δύο οποιονδήποτε στοιχείων του $(\mathbf{L}, \sqsubseteq)$, είτε αυτά είναι συγκρίσιμα στοιχεία (δηλ., $x \sqsubseteq y$ ή $y \sqsubseteq x$) είτε είναι μη-συγκρίσιμα στοιχεία (δηλ., παράλληλα, $x \parallel y$).

(Ασαφή Πλέγματα)

- ❖ Κάθε χρήση μιας συνάρτησης βαθμού διάταξης (σ) ονομάζεται *συλλογιστική ασαφών πλεγμάτων (ΣΑΠ) (fuzzy lattice reasoning (FLR))*.
- ❖ Μια συνάρτηση βαθμού διάταξης (σ) υποστηρίζει δύο τύπους συλλογιστικής:
 - ⦿ τον γενικευμένο τρόπο που θέτει και
 - ⦿ τη συλλογιστική κατ' αναλογία .

(Ασαφή Πλέγματα)

- ❖ Η *συλλογιστική κατ' αναλογία* είναι ένας τύπος *προσεγγιστικής συλλογιστικής (approximate reasoning)* κατάλληλος για χειρισμό ελλιπούς γνώσης.
- ❖ Δοθέντων:
 - (α) ενός συνόλου κανόνων $a_i \rightarrow c_i, i \in \{1, \dots, L\}$, και
 - (β) ενός αιτίου a_0 τέτοιο ώστε $a_0 \not\sqsubseteq a_i, i \in \{1, \dots, L\}$, επιλέγεται εκείνος ο κανόνας $a_j \rightarrow c_j$, ο οποίος μεγιστοποιεί τη συνάρτηση βαθμού διάταξης $J = \arg \max_{i \in \{1, \dots, L\}} \sigma(a_0 \sqsubseteq a_i)$. Έπεται το αποτέλεσμα c_j .

(Ασαφή Πλέγματα)

- ❖ **Συνάρτηση τιμοδότησης** στο πλέγμα $(\mathbf{L}, \sqsubseteq)$ είναι μια πραγματική συνάρτηση $v: \mathbf{L} \rightarrow \mathbf{R}$ που ικανοποιεί:
$$v(\mathbf{x}) + v(\mathbf{y}) = v(\mathbf{x} \sqcap \mathbf{y}) + v(\mathbf{x} \sqcup \mathbf{y})$$
- ❖ Μια συνάρτηση τιμοδότησης καλείται:
 - ⊙ **μονότονη** (*monotone*), αν και μόνον αν $\mathbf{x} \sqsubseteq \mathbf{y} \Rightarrow v(\mathbf{x}) \leq v(\mathbf{y})$
 - ⊙ **θετική** (*positive*) αν και μόνον αν $\mathbf{x} \sqsubset \mathbf{y} \Rightarrow v(\mathbf{x}) < v(\mathbf{y})$

(Ασαφή Πλέγματα)

- ❖ Εάν η συνάρτηση $v: \mathbf{L} \rightarrow [0, +\infty)$ είναι θετικής τιμοδότησης στο πλέγμα $(\mathbf{L}, \sqsubseteq)$ τότε οι συναρτήσεις:

(α) *σίγμα-συνένωση (sigma-join)*: $\sigma_{\sqcup}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = v(\mathbf{u}) / v(\mathbf{x} \sqcup \mathbf{u})$

(β) *σίγμα-διατομή (sigma-meet)*: $\sigma_{\sqcap}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = v(\mathbf{x} \sqcap \mathbf{u}) / v(\mathbf{u})$

είναι (συναρτήσεις) βαθμού διάταξης.

(Ασαφή Πλέγματα)

- ❖ Από συναρτήσεις θετικής τιμοδότησης σε (βασικά) πλέγματα προκύπτουν **μετρικές** καθώς και συναρτήσεις **βαθμού διάταξης**.
- ❖ Αν η συνάρτηση $v: L \rightarrow \mathbb{R}$ είναι θετικής τιμοδότησης σε ένα πλέγμα (L, \sqsubseteq) , τότε η συνάρτηση $d: L \times L \rightarrow [0, +\infty)$ με $d(x, y) = v(x \sqcup y) - v(x \sqcap y)$ είναι μια **μετρική**.

[Σημείωση: αν η συνάρτηση v είναι μονότονης τιμοδότησης τότε η συνάρτηση d είναι μια **ψευδομετρική**].

Επεκτάσεις σε Ιεραρχίες Πλεγμάτων

- ❖ Ένα πλέγμα (\mathbf{L}, Ξ) μπορεί να ισούται με το Καρτεσιανό γινόμενο N – ενδεχομένως ανόμοιων – **βασικών** (**constituent**) πλεγμάτων (\mathbf{L}_i, Ξ) , $i=1, \dots, N$.
Δηλαδή, μπορεί να είναι $(\mathbf{L}, \Xi) = (\mathbf{L}_1, \Xi) \times \dots \times (\mathbf{L}_N, \Xi)$ όπου κάθε βασικό πλέγμα (\mathbf{L}_i, Ξ) , $i=1, \dots, N$ χαρακτηρίζεται από τη δική του σχέση διάταξης Ξ .

Επεκτάσεις σε Ιεραρχίες Πλεγμάτων

❖ Πλέγματα Διαστημάτων

- Έστω $[a,b]$, $[c,d]$ δύο γενικευμένα διαστήματα (*generalized intervals*). Η διατομή \sqcap και η συνένωση \sqcup στο πλήρες πλέγμα $(\mathbf{L} \times \mathbf{L}, \sqsubseteq \times \sqsubseteq)$ υπολογίζονται, αντίστοιχα, ως:

$$[a,b] \sqcap [c,d] = [a \sqcup c, b \sqcap d]$$

και

$$[a,b] \sqcup [c,d] = [a \sqcap c, b \sqcup d]$$

Επεκτάσεις σε Ιεραρχίες Πλεγμάτων

❖ (Πλέγματα Διαστημάτων)

❖ Μετρική:

Η συνάρτηση $d: (\mathbf{L} \times \mathbf{L}, \sqsubseteq \times \sqsubseteq) \times (\mathbf{L} \times \mathbf{L}, \sqsubseteq \times \sqsubseteq) \rightarrow [0, +\infty)$ με τύπο:

$$\begin{aligned}d([a,b], [c,d]) &= \nu_1([a,b] \sqcup [c,d]) - \nu_1([a,b] \sqcap [c,d]) \\ &= \nu(\theta(a \sqcap c)) + \nu(b \sqcup d) - \nu(\theta(a \sqcup c)) - \nu(b \sqcap d) \\ &= \nu(\theta(a) \sqcup \theta(c)) + \nu(b \sqcup d) - \nu(\theta(a) \sqcap \theta(c)) - \nu(b \sqcap d)\end{aligned}$$

Όπου, η σύνθετη συνάρτηση $\nu \circ \theta$ είναι θετικής τιμοδότησης στο πλέγμα $(\mathbf{L}, \sqsubseteq)$ και η συνάρτηση $\nu_1([x,y]) = \nu(\theta(x)) + \nu(y)$ είναι θετικής τιμοδότησης στο πλέγμα $(\mathbf{L} \times \mathbf{L}, \sqsubseteq \times \sqsubseteq)$ των γενικευμένων διαστημάτων.

Επεκτάσεις σε Ιεραρχίες Πλεγμάτων

- ❖ (Πλέγματα Διαστημάτων)

- ❖ Συναρτήσεις βαθμού διάταξης:

- ⊙ Η συνάρτηση $\sigma_{\sqcup} : (\mathbf{L} \times \mathbf{L}, \sqsupseteq \times \sqsubseteq) \times (\mathbf{L} \times \mathbf{L}, \sqsupseteq \times \sqsubseteq) \rightarrow [0,1]$ με τύπο
$$\sigma_{\sqcup}([a,b], [c,d]) = \nu_1([c,d]) / \nu_1([a,b] \sqcup [c,d])$$
$$= [\nu(\theta(c)) + \nu(d)] / [\nu(\theta(a \sqcap c)) + \nu(b \sqcup d)]$$

Για $\nu_1([a,b] \sqcup [c,d]) = 0 \Leftrightarrow [a,b] = \emptyset = [c,d]$ είναι $\sigma_{\sqcup}([a,b], [c,d]) = 1$ εξορισμού.

Επεκτάσεις σε Ιεραρχίες Πλεγμάτων

- ❖ (Πλέγματα Διαστημάτων)

- ❖ Συναρτήσεις βαθμού διάταξης:

- ⊙ Η συνάρτηση $\sigma_{\cap} : (\mathbf{L} \times \mathbf{L}, \supseteq \times \sqsubseteq) \times (\mathbf{L} \times \mathbf{L}, \supseteq \times \sqsubseteq) \rightarrow [0,1]$ με τύπο
$$\begin{aligned}\sigma_{\cap}([a,b], [c,d]) &= \nu_1([a,b] \cap [c,d]) / \nu_1([a,b]) \\ &= [\nu(\theta(a \sqcup c)) + \nu(b \cap d)] / [\nu(\theta(a)) + \nu(b)]\end{aligned}$$

Για $\nu_1([a,b])=0 \Leftrightarrow [a,b]=\emptyset$ θεωρούμε $\sigma_{\cap}([a,b],[c,d])=1$ εξορισμού.

Ενοποίηση Ανόμοιων Τύπων Δεδομένων

❖ Παράδειγμα 1

Παραδείγματα συνόλων που είναι πλέγματα:

- Πραγματικοί Αριθμοί.

[Σημείωση: Μια γνησίως αύξουσα συνάρτηση $v: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνάρτηση θετικής τιμοδότησης στο πλέγμα (\mathbb{R}, \leq) .

Μια γνησίως φθίνουσα συνάρτηση $\theta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνάρτηση δυικού ισομορφισμού στο (\mathbb{R}, \leq)].

- Το μερικώς διατεταγμένο πλέγμα (\mathbb{F}, Ξ) όλων των πραγματικών συναρτήσεων που ορίζονται πάνω στο σύνολο \mathbb{R} των πραγματικών αριθμών, όπου η σχέση $f \Xi g$ ερμηνεύεται ως $f(x) \leq g(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Ενοποίηση Ανόμοιων Τύπων Δεδομένων

- ❖ **Χώροι Μέτρου** $(\Omega, \Sigma_\Omega, m_{\Sigma_\Omega})$, όπου Ω είναι ένα σύνολο, Σ_Ω είναι μια σ -άλγεβρα του συνόλου Ω και m_{Σ_Ω} είναι ένα μέτρο πάνω στη Σ_Ω .
- ⦿ Ένας **Χώρος Πιθανότητας** είναι μια ειδική περίπτωση Χώρου Μέτρου με $m_{\Sigma_\Omega}(\Omega) = 1$.

Ενοποίηση Ανόμοιων Τύπων Δεδομένων

- Έστω Ω το σύνολο των (αληθών/ψευδών) προτάσεων που ενδιαφέρουν σε μια συγκεκριμένη εφαρμογή και έστω Σ_Ω το δυναμοσύνολό του. Μπορούμε να ορίσουμε ένα μέτρο, δηλ. μια συνάρτηση $m_{\Sigma_\Omega}: \Sigma_\Omega \rightarrow [0, +\infty)$. Η τριάδα $(\Omega, \Sigma_\Omega, m_{\Sigma_\Omega})$ είναι ένας χώρος μέτρου.

Ενοποίηση Ανόμοιων Τύπων Δεδομένων

❖ *Άλγεβρα Boole* (ή *B-άλγεβρα*) είναι ένα πλέγμα μερικώς διατεταγμένο, πλήρες, φραγμένο, συμπληρωματικό και επιμεριστικό.

(Σημείωση: Εδώ ο όρος *άλγεβρα* χρησιμοποιείται με την ευρεία έννοια μιας αλγεβρικής δομής).

Ενοποίηση Ανόμοιων Τύπων Δεδομένων

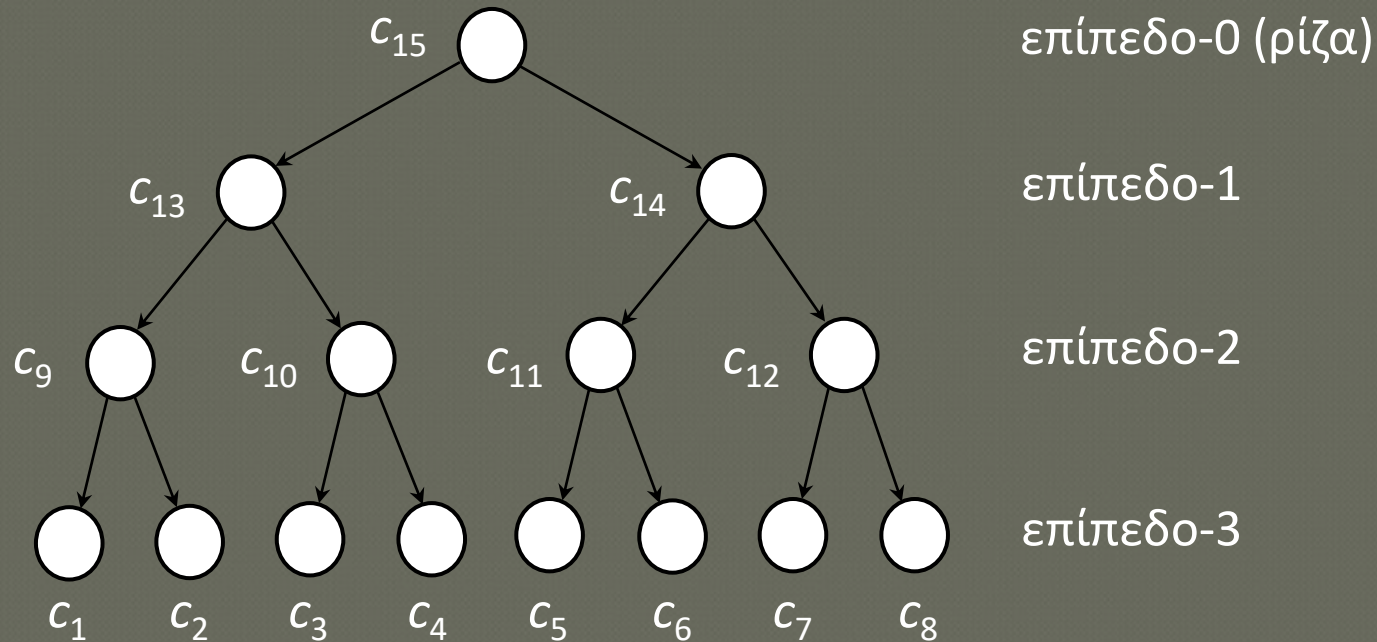
❖ Παράδειγμα 2 : B-άλγεβρα

- Προτάσεις. Το σύνολο των (αληθών/ψευδών) προτάσεων.
- Το σύνολο $\{0,1\}$ εφοδιασμένο με τις πράξεις $\vee, \wedge, '$, είναι η γνωστή άλγεβρα *Boole* $(\{0,1\}, \vee, \wedge, ', 0, 1)$, που χρησιμοποιείται στα λογικά κυκλώματα.
- Η δομή $(2^\Omega, \cup, \cap, ', \emptyset, \Omega)$, όπου Ω είναι ο πεπερασμένος δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης και 2^Ω το δυναμοσύνολο του Ω (το οποίο καλείται και *άλγεβρα των ενδεχομένων*).

Ενοποίηση Ανόμοιων Τύπων Δεδομένων

❖ Ένα δένδρο αναπαριστά ένα πλέγμα συνένωσης (*join lattice*), όπου κάθε ζεύγος κόμβων x και y έχει συνένωση $x \sqcup y$, αλλά όχι διατομή $x \sqcap y$.

Ενοποίηση Ανόμοιων Τύπων Δεδομένων



Στοιχεία Επικοινωνίας

Δρ. Ανέστης Γ. Χατζημιχαηλίδης

email: hatzane@teiemt.gr

Τηλ. 693-815-1768

ΕΥΧΑΡΙΣΤΩ