Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών
"Προηγμένες Τεχνολογίες Υπολογιστών
και Πληροφορικής"

Υπολογιστική Νοημοσύνη

Μάθημα 9ο

Δρ. Βασίλειος Γ. Καμπουρλάζος
Δρ. Ανέστης Γ. Χατζημιχαηλίδης

Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής Τ.Ε.
ΤΕΙ Ανατολικής Μακεδονίας και Θράκης

2016-2017

Περιεχόμενα

Μια Ενοποιητική Προσέγγιση στην ΥΝ

- Η Θεωρία Πλεγμάτων στην ΥΝ.
- Υπολογιστικές Μεθοδολογίες σε Πλέγματα.
- Αριθμοί Διαστημάτων.

Αριθμοί Διαστημάτων (ΑΔ)

- Μια Δημοφιλής Ιεραρχία Πλεγμάτων.
- Αριθμοί Διαστημάτων.
- Αλγόριθμοι Εφαρμογής ΑΔ.

Μια Δημοφιλής Ιεραρχία Πλεγμάτων

- **<u>Επίπεδο-0:</u>** Το Πλέγμα ($\mathbf{R}$,≤) των Πραγματικών Αριθμών.

Συγκεκριμένα, για α,β∈R είναι είτε α ≤ β είτε β ≤ α.

- Η αλυσίδα ($\mathbf{R}$,≤) δεν είναι πλήρες πλέγμα.

- Μπορεί να μετατραπεί στο πλήρες πλέγμα ($\overline{\mathrm{R}}$ =$\mathbf{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$, ≤)

Μια Δημοφιλής Ιεραρχία Πλεγμάτων

- Έστω ένα πλέγμα ($\mathbf{L}$=[o,i],$\leq$) πραγματικών αριθμών, με ελάχιστο και μέγιστο στοιχείο τα $o \in \overline{\mathrm{R}}$ και $i \in \overline{\mathrm{R}}$, αντίστοιχα, όπου o<i.

- Μια γνησίως αύξουσα συνάρτηση v: $\mathbf{L} \rightarrow [0,+\infty)$ με $v(o)$=0 και $v(i)$<+∞ είναι συνάρτηση θετικής τιμοδότησης στο πλέγμα ($\mathbf{L}$,$\leq$).
  Μια γνησίως φθίνουσα συνάρτηση θ: $\mathbf{L} \rightarrow \mathbf{L}$ με $\theta(o)$=i και $\theta(i)$=o, είναι συνάρτηση δυικού ισομορφισμού στο ($\mathbf{L}$,$\leq$).

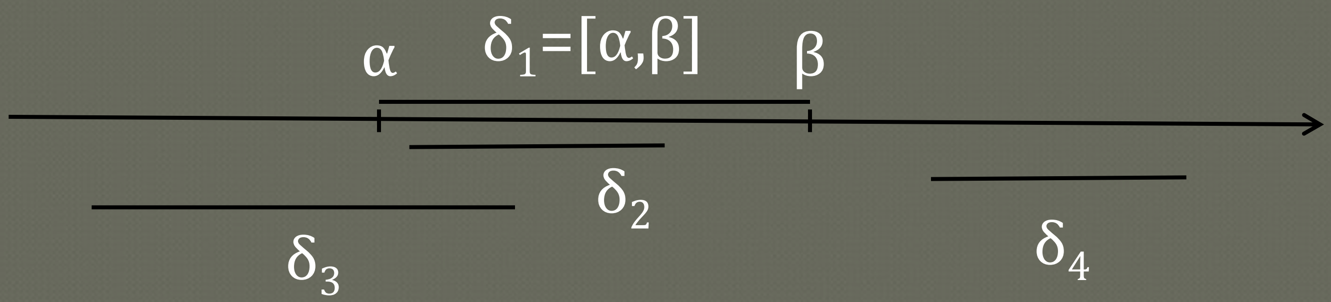
Μια Δημοφιλής Ιεραρχία Πλεγμάτων

- Παραμετρικές συναρτήσεις ***v*** και θ, εισάγουν ρυθμίσιμες μη-γραμμικότητες, των οποίων οι παράμετροι μπορούν να εκτιμηθούν βέλτιστα με διάφορες τεχνικές, π.χ. με εξελικτικό υπολογισμό.

- Αν δοθεί συνάρτηση v: $\mathsf{L} \to [0,+\infty)$ θετικής τιμοδότησης έπεται μια *μετρική* συνάρτηση d: $\mathsf{L}\times\mathsf{L} \to [0,+\infty)$ με τύπο $d(x,y) = v(x \vee y) - v(x \wedge y)$.

Μια Δημοφιλής Ιεραρχία Πλεγμάτων

- **<u>Επίπεδο-1</u>:** Το Πλέγμα (I_1,$\sqsubseteq$) των Διαστημάτων Τύπου-1(Τ1)



- Δοθέντων μιας συνάρτησης θετικής τιμοδότησης $\boldsymbol{v}$ και μιας συνάρτησης δυϊκού ισομορφισμού θ στο πλέγμα ($\mathbf{L}$,$\leq$) έπεται μια συνάρτηση v_1:$\mathbf{L}\times\mathbf{L}\rightarrow[0,+\infty)$ θετικής τιμοδότησης στο πλέγμα ($\mathbf{L}\times\mathbf{L}$,$\geq\times\leq$) των *γενικευμένων διαστημάτων*, με τύπο $v_1([a,b])= v(\theta(a)) + v(b)$.

Μια Δημοφιλής Ιεραρχία Πλεγμάτων

Συνεπώς, μπορούν να οριστούν στο υποπλέγμα $(\mathrm{I}_1,\sqsubseteq)$:

- Μια *μετρική* d_1: $\mathrm{I}_1 \times \mathrm{I}_1 \to [0,+\infty)$ με $d_1([a,\mathrm{b}], [\mathrm{c},\mathrm{d}])= [v(\theta(a\wedge \mathrm{c})) - v(\theta(a\vee \mathrm{c}))] + [v(\mathrm{b}\vee \mathrm{d}) - v(\mathrm{b}\wedge \mathrm{d})]$

- Δύο *βαθμοί διάταξης* $\sigma_{1\sqcup}$: $\mathrm{I}_1\times\mathrm{I}_1\to[0,1]$ και $\sigma_{1\sqcup}$: $\mathrm{I}_1\times\mathrm{I}_1\to[0,1]$ ως ακολούθως:

- $\sigma_{\sqcup}([a,\mathrm{b}], [\mathrm{c},\mathrm{d}]) = [v(\theta(\mathrm{c}))+v(\mathrm{d})] / [v(\theta(a\wedge \mathrm{c}))+v(\mathrm{b}\vee \mathrm{d})]$
  αν $[a,\mathrm{b}]\sqcup[\mathrm{c},\mathrm{d}]=\varnothing$ τότε $\sigma_{\sqcup}([a,\mathrm{b}],[\mathrm{c},\mathrm{d}])=1$.

- $\sigma_{\sqcap}([a,\mathrm{b}], [\mathrm{c},\mathrm{d}])= [v(\theta(a\vee \mathrm{c}))+v(\mathrm{b}\wedge \mathrm{d})] / [v(\theta(a))+v(\mathrm{b})]$
  αν $[a,\mathrm{b}]= \varnothing$ τότε $\sigma_{\sqcap}([a,\mathrm{b}],[\mathrm{c},\mathrm{d}])=1$.

Μια Δημοφιλής Ιεραρχία Πλεγμάτων

- **Επίπεδο-2:** Το Πλέγμα $(I_2,\sqsubseteq)$ των Διαστημάτων Τύπου-2 (Τ2)

- Δοθέντων, στο πλέγμα $(\mathbf{L}\times\mathbf{L},\geq\times\leq)$, μιας συνάρτησης θετικής τιμοδότησης v_1: $\mathbf{L}\times\mathbf{L}\to[0,+\infty)$ με $v_1([a,b])= v(\theta(a)) + v(b)$ και μιας συνάρτησης δυϊκού ισομορφισμού θ_1: $\mathbf{L}\times\mathbf{L}\to \mathbf{L}\times\mathbf{L}$ με $\theta_1([a,b])=[b,a]$ έπεται μια συνάρτηση θετικής τιμοδότησης

  v_2:$\mathbf{L}\times\mathbf{L}\times\mathbf{L}\times\mathbf{L} \to[0,+\infty)$

  στο πλήρες πλέγμα $(\mathbf{L}\times\mathbf{L}\times\mathbf{L}\times\mathbf{L},\leq\times\geq\times\geq\times\leq)$,

  με τύπο $v_2([a_1,a_2],[b_1,b_2])= v_1(\theta_1([a_1,a_2]))+v_1([b_1,b_2])$

  $=v(a_1)+ v\,(\theta(a_2))+v(\theta(b_1))+ v(b_2)$

Μια Δημοφιλής Ιεραρχία Πλεγμάτων

- Συνεπώς, μπορούν να οριστούν στο πλέγμα $(\mathbf{L}\times\mathbf{L}\times\mathbf{L}\times\mathbf{L},\leq\times\geq\times\geq\times\leq)$, επομένως και στο εμφυτευμένο υποπλέγμα $(\mathrm{I}_2,\sqsubseteq)$:
  μια *μετρική* $d_2:\mathrm{I}_2\times\mathrm{I}_2\rightarrow[0,+\infty)$ και
  δύο *βαθμοί διάταξης* $\sigma_{1\sqcup}: \mathrm{I}_2\times\mathrm{I}_2\rightarrow[0,1]$ και $\sigma_{1\sqcup}: \mathrm{I}_2\times\mathrm{I}_2\rightarrow[0,1]$

Μια Δημοφιλής Ιεραρχία Πλεγμάτων

- **<u>Επίπεδο-3</u>:** Το Πλέγμα $(\mathbf{F}_1, \preccurlyeq)$ των Αριθμών Διαστημάτων Τύπου-1 (ΑΔ Τ1)

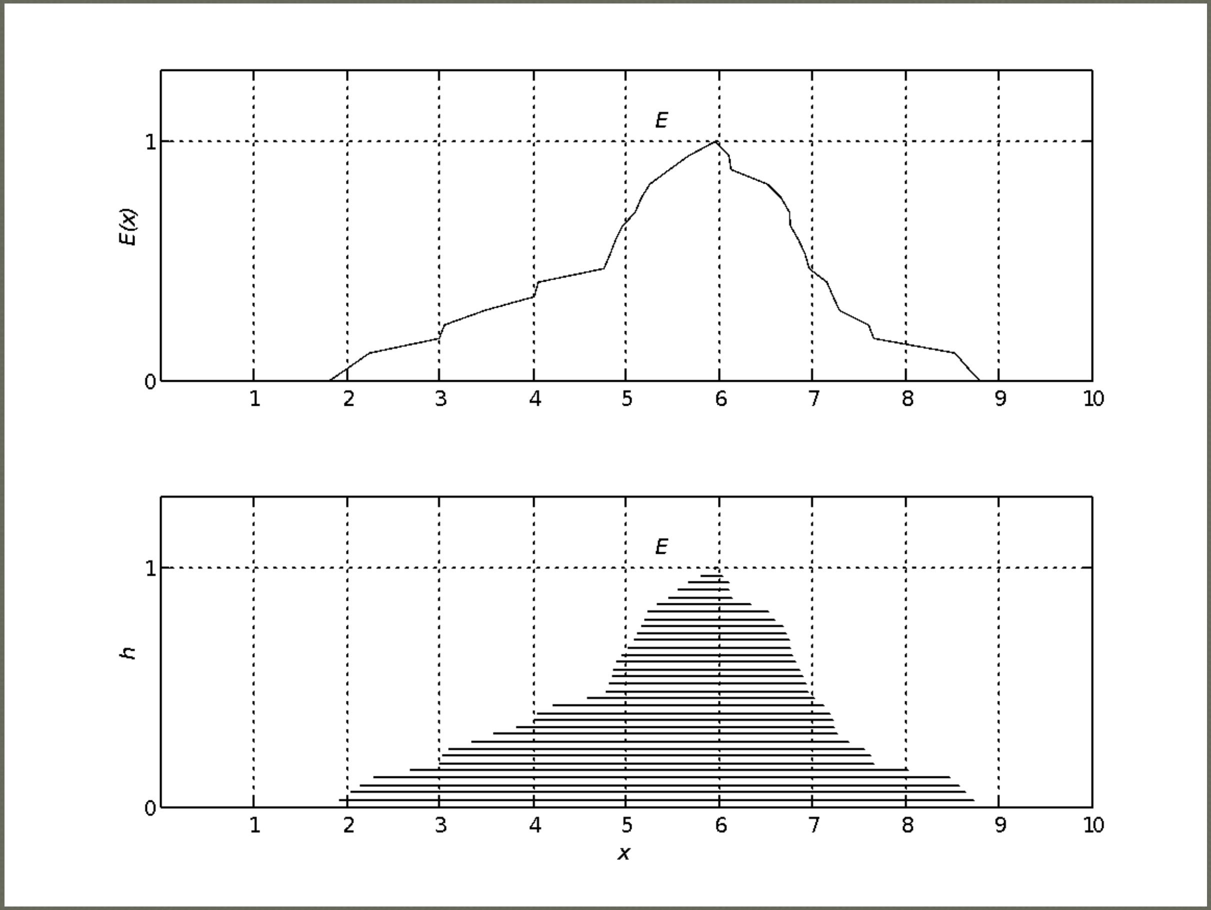
  Χρησιμοποιούμε το *θεώρημα της ταυτοποίησης* (βλ. *Ασαφή Σύνολα*), σύμφωνα με το οποίο ένα ασαφές σύνολο μπορεί να αναπαρασταθεί ισοδύναμα είτε με τη συνάρτηση συμμετοχής του ή με το σύνολο των α-διατομών του.

Μια Δημοφιλής Ιεραρχία Πλεγμάτων

- Ο ΑΔΤ1 ορίζεται ως μια συνάρτηση F:[0,1]$\rightarrow$$I_1$, που ικανοποιεί τις ακόλουθες δύο σχέσεις
  i) $h_1 \leq h_2 \Rightarrow F_{h1} \sqsupseteq F_{h2}$ και ii) $\forall X \subseteq [0,1]: \bigcap_{h \in X} F_h = F_{\vee X}$

- Ένας ΑΔ μπορεί να αναπαρασταθεί είτε με ένα σύνολο διαστημάτων F_h, $h \in [0,1]$ (*αναπαράσταση διαστημάτων*)
  είτε με μια συνάρτηση $F(x) = \vee_{h \in [0,1]} \{h : x \in F_h\}$,
  (*αναπαράσταση συνάρτησης συμμετοχής*)

Αριθμοί Διαστημάτων



Μια Δημοφιλής Ιεραρχία Πλεγμάτων

- Μια *μετρική* μεταξύ δύο ΑΔΤ1 ορίζεται ως ακολούθως:

  $D_1 : \mathrm{F}_1 \times \mathrm{F}_1 \to [0,+\infty)$ με $D_1(F,G) = \int_0^1 d_1(F_h, G_h)\,dh$

- Επίσης, ορίζονται δύο *βαθμοί διάταξης* $\sigma_\wedge : \mathbf{F}_1 \times \mathbf{F}_1 \to [0,1]$ και $\sigma_\vee : \mathbf{F}_1 \times \mathbf{F}_1 \to [0,1]$, ως ακολούθως:

$$\sigma_\wedge(E,F) = \int_0^1 \sigma_\cap(E_h, F_h)\,dh$$

$$\sigma_\vee(E,F) = \int_0^1 \sigma_\cup(E_h, F_h)\,dh$$

Μια Δημοφιλής Ιεραρχία Πλεγμάτων

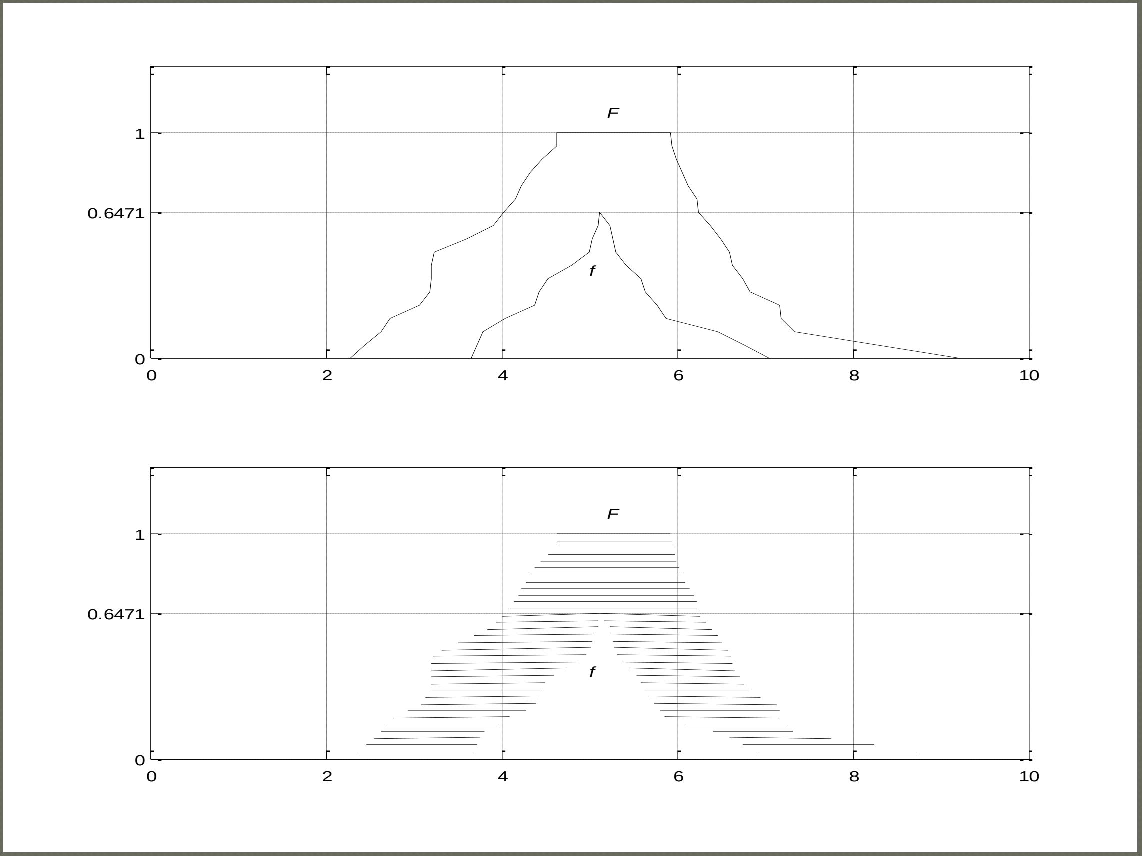
- **<u>Επίπεδο-4</u>:** Το μερικώς διατεταγμένο πλήρες πλέγμα $(\mathbf{F}_2,\preccurlyeq)$ των Αριθμών Διαστημάτων Τύπου-2 (ΑΔ Τ2)

- Ένας ΑΔΤ2 ορίζεται ως ένα διάστημα ΑΔΤ1. Δηλαδή, $[U,W]=\{X\in F_1: U \preccurlyeq X \preccurlyeq W\}$.

- Ένας ΑΔΤ2 μπορεί να αναπαρασταθεί είτε με ένα σύνολο διαστημάτων $[U,W]_{\mathrm{h}}$, $\mathrm{h}\in[0,1]$ (*αναπαράσταση διαστημάτων*) είτε με δύο συναρτήσεις

  $U(\mathrm{x})=\vee_{\mathrm{h}\in[0,1]}\{\mathrm{h}:\mathrm{x}\in U_{\mathrm{h}}\}$ και $W(\mathrm{x})=\vee_{\mathrm{h}\in[0,1]}\{\mathrm{h}:\mathrm{x}\in W_{\mathrm{h}}\}$ (*αναπαράσταση συναρτήσεων συμμετοχής*).

Μια Δημοφιλής Ιεραρχία Πλεγμάτων



Μια Δημοφιλής Ιεραρχία Πλεγμάτων

- Μια *μετρική* μεταξύ δύο ΑΔΤ2 ορίζεται ως ακολούθως:

$$D_2 : \mathrm{F}_2 \times \mathrm{F}_2 \rightarrow [0,+\infty) \text{ με } D_2(F,G) = \int_0^1 d_2(F_h, G_h)\,dh$$

- Επίσης, ορίζονται δύο *βαθμοί διάταξης* $\sigma_\wedge : \mathrm{F}_2 \times \mathrm{F}_2 \rightarrow [0,1]$ και $\sigma_\vee : \mathrm{F}_2 \times \mathrm{F}_2 \rightarrow [0,1]$, χρησιμοποιώντας τις αντίστοιχες εξισώσεις των ΑΔΤ1.

Μια Δημοφιλής Ιεραρχία Πλεγμάτων

- **<u>Επίπεδο-5</u>:** Πλέγματα N-άδων Αριθμών ΔιαστημάτωνT1/T2

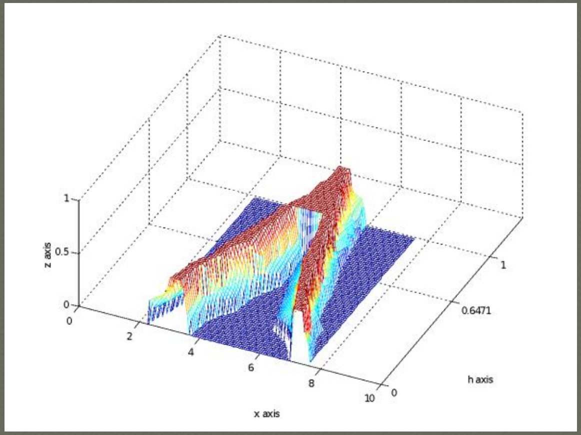
- Θεωρούμε το Καρτεσιανό γινόμενο $\mathbf{G}=\mathbf{G}_1\times\ldots\times\mathbf{G}_N$, όπου κάθε ένα από τα πλέγματα $(\mathbf{G}_i,\preccurlyeq)$, $i\in\{1,\ldots,N\}$ ισούται με $(\mathbf{F}_1,\preccurlyeq)$.

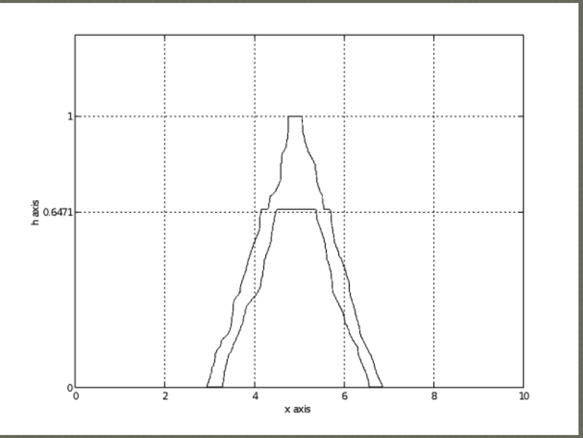
- Δοθέντων δύο συναρτήσεων ${}_iv$: $\mathbf{L}_i\rightarrow[0,+\infty)$ και ${}_i\theta$: $\mathbf{L}_i\rightarrow\mathbf{L}_i$ στο αντίστοιχο πλέγμα $(\mathbf{L}_i,\leq)$ πραγματικών αριθμών, όπως περιγράφεται στο ***Επίπεδο-0***, έπεται μια συνάρτηση ${}_iv_1([a,b])= {}_iv({}_i\theta(a)) + {}_iv(b)$ θετικής τιμοδότησης στο πλέγμα $(\mathbf{L}_i\times\mathbf{L}_i,\geq\times\leq)$ των γενικευμένων διαστημάτων.

Μια Δημοφιλής Ιεραρχία Πλεγμάτων

- Επομένως, σύμφωνα με τα προηγούμενα, μπορούμε να ορίσουμε στο πλέγμα $(\mathbf{G},\sqsubseteq)$, μετρικές καθώς και συναρτήσεις βαθμού διάταξης (οι συναρτήσεις βαθμού διάταξης μπορούν να ορισθούν με δύο διαφορετικούς τρόπους).

Αριθμοί Διαστημάτων





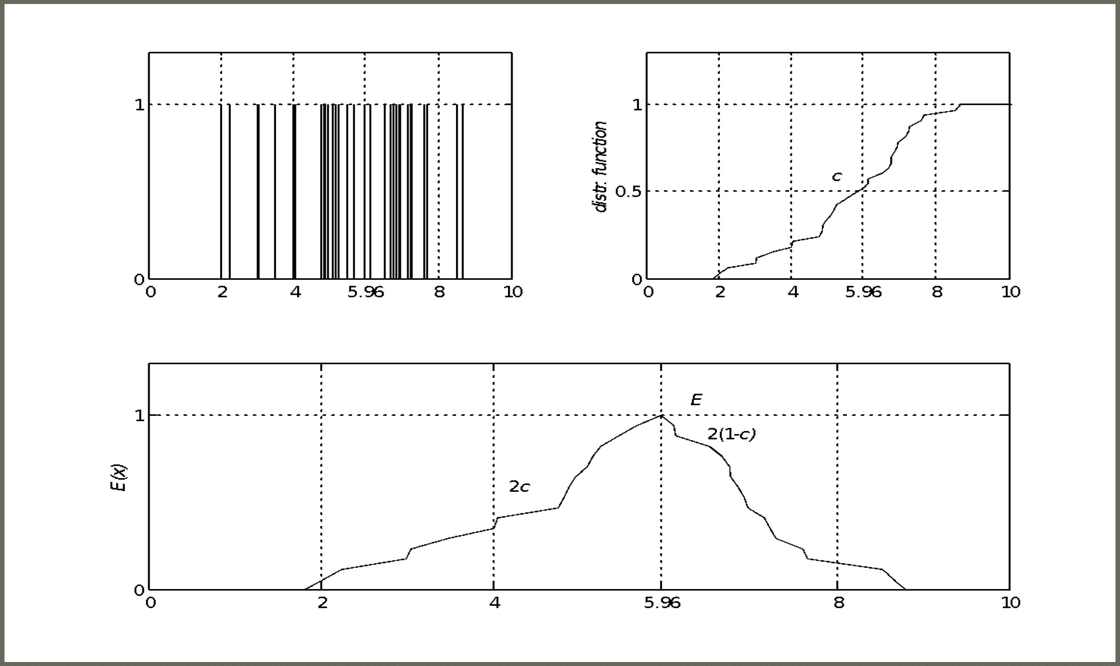
(Σχ. αριστερά)
Τριών διαστάσεων Αριθμός Διαστημάτων Τύπου-2 (3-Δ ΑΔΤ2), έστω *F*.
(Σχ. δεξιά)
Η *ζ-φέτα* $F_{0.5}$ του 3-Δ ΑΔΤ2 *F* είναι ο 2-Δ ΑΔΤ2 του σχήματος.

Αριθμοί Διαστημάτων

- Εστιάζουμε στους *Αριθμούς Διαστημάτων Τύπου-1* (ΑΔ Τ1)

- Ένας *Αριθμός Διαστήματος* (ΑΔ) μπορεί να ερμηνευτεί:
  i) ως ασαφής αριθμός, ο οποίος αναπαριστά μια *κατανομή εφικτότητας* (*possibility distribution*) και
  ii) ως *κατανομή πιθανότητας* (*probability distribution*).

Αριθμοί Διαστημάτων



Σχήμα 1ο: Μια κατανομή δειγμάτων στο [0,10] με διάμεσο μ=5.96
Σχήμα 2ο: Η αντίστοιχη *συνάρτηση αθροιστικής κατανομής* c(.)
Σχήμα 3ο:Υπολογισμός του ΑΔ από την συνάρτηση κατανομής *c*(.) σύμφωνα με τον αλγόριθμο CALCIN.

Αριθμοί Διαστημάτων

- **Αναπαράσταση ΑΔ**:

- Από πρακτική άποψη ένας ΑΔ αναπαρίσταται στη μνήμη του υπολογιστή με ένα L×2 πίνακα πραγματικών αριθμών, $[a_1\ b_1; a_2\ b_2;\ldots; a_{\mathrm{L}}\ b_{\mathrm{L}}]$, όπου L είναι ο προκαθορισμένος από το χρήστη, αριθμός επιπέδων $\mathrm{h}_1,\mathrm{h}_2,\ldots,\mathrm{h}_{\mathrm{L}}$, ώστε $0<\mathrm{h}_1\leq\mathrm{h}_2\leq\ldots\leq\mathrm{h}_{\mathrm{L}}=1$. Στην πράξη συνήθως χρησιμοποιούμε L=16 ή L=32 επίπεδα ανά ίσα διαστήματα στο διάστημα [0,1].

- Ένας δύο διαστάσεων ΑΔΤ2 αναπαρίσταται με έναν L×4 πίνακα, ενώ ένας ΑΔΤ2 τριών διαστάσεων αναπαρίσταται με έναν L×4×L πίνακα.

Αριθμοί Διαστημάτων

- **Υπολογισμοί με ΑΔ**

  Στη βιβλιογραφία, έχουν προταθεί διάφορες αριθμητικές ασαφών αριθμών, κάποιες από τις οποίες βασίζονται σε *αριθμητική διαστημάτων* (*interval arithmetic*).

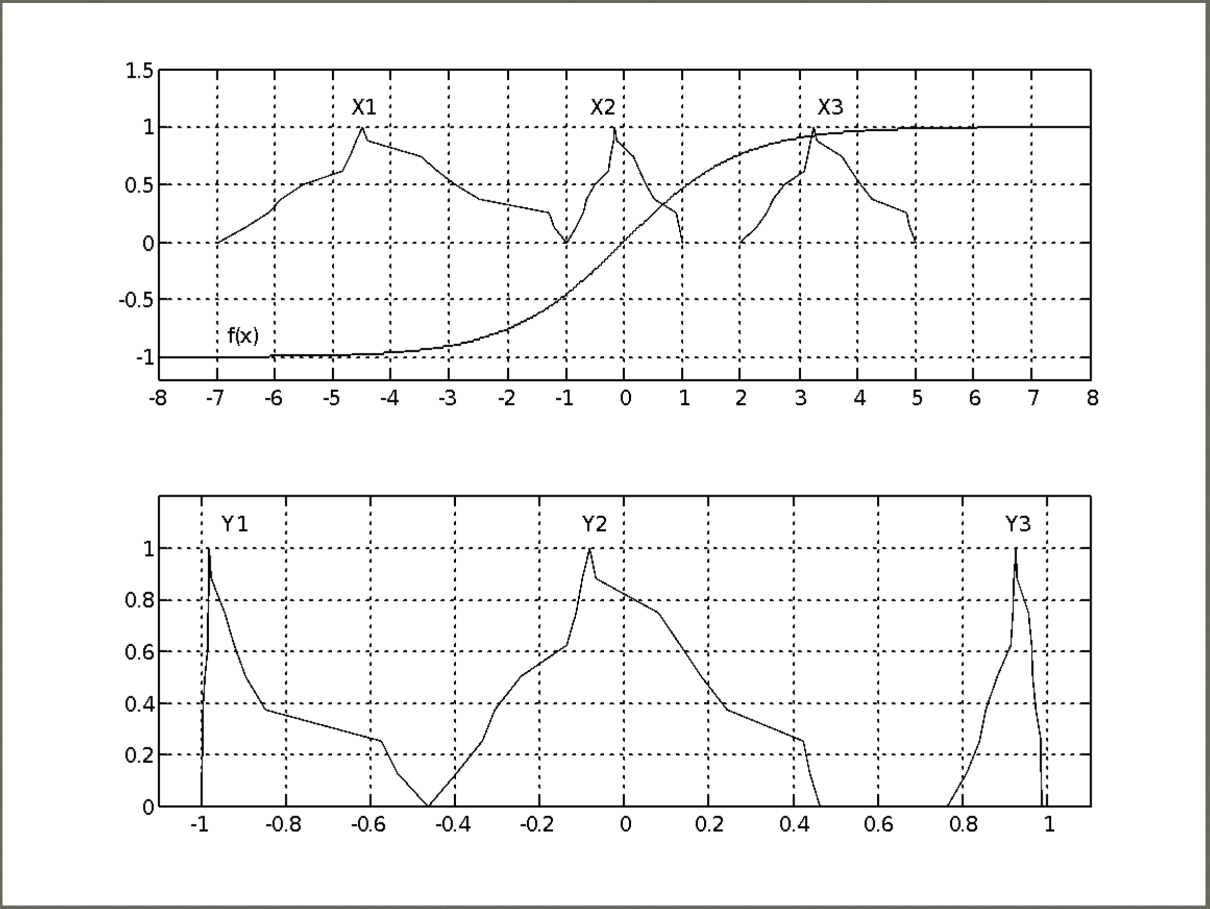
- Επιλέγοντας την ανάλυση των ΑΔ στη βάση της *αναπαράστασης-διαστημάτων*, οι αριθμητικές πράξεις ορίζονται μέσα σε ένα γραμμικό χώρο ακολουθώντας καλώς ορισμένες αλγεβρικές πρακτικές.

Αριθμοί Διαστημάτων

- Μπορούμε να εισάγουμε μη-γραμμικούς μετασχηματισμούς στο χώρο F_1 των ΑΔ.

- Στα σχήματα που ακολουθούν έχουμε
  Σχ.1: τη σιγμοειδή συνάρτηση $f(x)=(1-e^{-x})/(1+e^{-x})$ και τρεις ΑΔ, τους X1, X2, X3 και
  Σχ.2: τους μετασχηματισμούς αυτών μέσω της *f*.

Αριθμοί Διαστημάτων



Αριθμοί Διαστημάτων

- Αν σε μια συγκεκριμένη εφαρμογή επιλέξουμε να ερμηνεύσουμε κάθε ΑΔ ως μια *κατανομή πιθανότητας*, τότε όλοι οι προαναφερθέντες (μη-γραμμικοί) μετασχηματισμοί και πράξεις μεταξύ ΑΔ μπορούν να τελούνται μεταξύ πληθυσμών μετρήσεων μέσω αλγόριθμων παλινδρόμησης, όπως θα δούμε στη συνέχεια.

Αλγόριθμοι Εφαρμογής ΑΔ

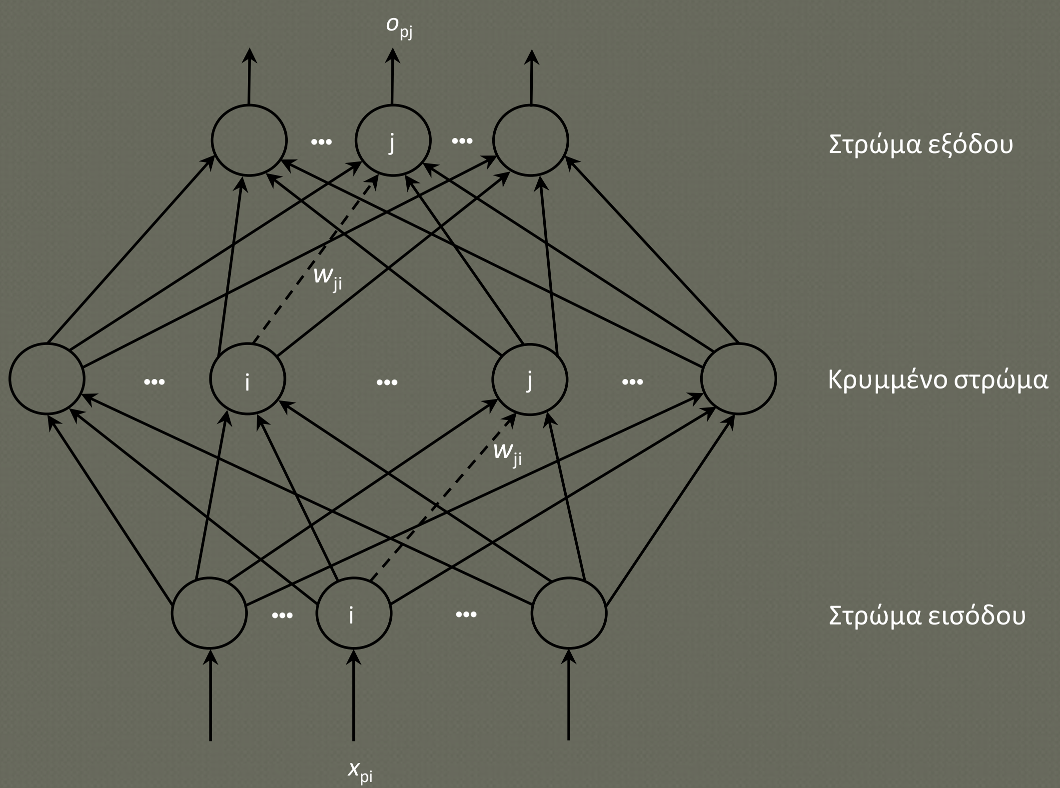
- Αλγόριθμοι που υπολογίζουν με Αριθμούς Διαστημάτων έχουν προταθεί στη βιβλιογραφία είτε για μηχανική μάθηση, είτε για παλινδρόμηση.

- **Αλγόριθμοι Μηχανικής Μάθησης**
  Οι παρουσιασθέντες τρεις αλγόριθμοι (για ομαδοποίηση, ταξινόμηση και αναγνώριση) αποτελούν γενικεύσεις αντίστοιχων αλγόριθμων της *Θεωρίας Προσαρμοστικού Συντονισμού* από το N-διάστατο Ευκλείδειο χώρο R^N στο χώρο F_1^N των ΑΔ.

Αλγόριθμοι Εφαρμογής ΑΔ

- **Αλγόριθμοι Παλινδρόμησης**
  Δύο ΑΔ μπορούν να προστεθούν μεταξύ τους. Επίσης, ένας ΑΔ μπορεί να πολλαπλασιαστή με μη-αρνητικό αριθμό ή/και να μετασχηματιστεί μη-γραμμικά με τη χρήση μιας (γνησίως) αύξουσας συνάρτησης. Με εκτέλεση των προαναφερθέντων δύο πράξεων προκύπτει ένας αλγόριθμος παλινδρόμησης, ο οποίος απεικονίζει μη-γραμμικά μια Ν-άδα ΑΔ σε ένα ΑΔ.
  Περαιτέρω δυνατότητες προκύπτουν αν ένας ΑΔ ερμηνευτεί ως μια κατανομή πιθανότητας.

Αλγόριθμοι Εφαρμογής ΑΔ



Στοιχεία Επικοινωνίας

Δρ. Ανέστης Γ. Χατζημιχαηλίδης
hatzane@teiemt.gr
Τηλ. 693-815-1768

ΕΥΧΑΡΙΣΤΩ