Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών
"Προηγμένες Τεχνολογίες Υπολογιστών
και Πληροφορικής"

Υπολογιστική Νοημοσύνη

Μάθημα 8ο

Δρ. Βασίλειος Γ. Καμπουρλάζος
Δρ. Ανέστης Γ. Χατζημιχαηλίδης

Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής Τ.Ε.
ΤΕΙ Ανατολικής Μακεδονίας και Θράκης

2016-2017

Περιεχόμενα

Μια Ενοποιητική Προσέγγιση στην ΥΝ

- Η Θεωρία Πλεγμάτων στην ΥΝ.
- Υπολογιστικές Μεθοδολογίες σε Πλέγματα.
- Αριθμοί Διαστημάτων.

Υπολογιστικές Μεθοδολογίες σε Πλέγματα

- Λογική και Συλλογιστική.
- Τυποποιημένη Ανάλυση Εννοιών.
- Μαθηματική Μορφολογία.
- Συγκριτικά Σχόλια.

Λογική και Συλλογιστική

- ***Σύζευξη*** δύο προτάσεων P, Q ονομάζουμε την πρόταση «P και Q» ($P \wedge Q$), η οποία είναι αληθής όταν και οι δύο προτάσεις P, Q είναι αληθείς και ψευδής σε οποιαδήποτε άλλη περίπτωση.
  $\wedge : \{0,1\} \times \{0,1\} \to \{0,1\}$

- Μια διμελής πράξη ***i*** στο $[0,1]$ καλείται ***ασαφής σύζευξη*** (***fuzzy intersection***), εάν είναι μια επέκταση της κλασικής σύζευξης. Δηλαδή, αν ισχύει:
  $\boldsymbol{i}(x,y) \in [0,1],\ \forall x,y \in [0,1]$
  και
  $\boldsymbol{i}(0,0) = \boldsymbol{i}(0,1) = \boldsymbol{i}(1,0) = 0,\ \boldsymbol{i}(1,1) = 1$

(Λογική και Συλλογιστική)

- Μια ασαφής σύζευξη **T**:$[0,1]\times[0,1]\rightarrow[0,1]$ καλείται ***t-norm*** (***τριγωνική νόρμα - triangular norm***) αν ικανοποιεί, κατ' ελάχιστο, τις παρακάτω ιδιότητες, $\forall$x,y,z$\in$[0,1].
- Δ1. **T**(x,1)=x (*συνοριακή συνθήκη*)
- Δ2. **T**(x,y) ≤ **T**(x,z) εάν y ≤ z (*μονότονη*)
- Δ3. **T**(x,y) = **T**(y,x) (*αντιμεταθετική*)
- Δ4. **T**(x, **T**(y,z)) = **T**(**T**(x,y),z) (*προσεταιριστική*)

- <u>Παραδείγματα ***t-norms***</u>

- $T_1(x,y)=\min(x,y)$ (*συνήθης*)
- $T_2(x,y) = xy$ (*αλγεβρικό γινόμενο*)
- $T_3(x,y) = max(0, x+y-1)$ (*φραγμένη διαφορά*)
- $T_4(x,y) = \begin{cases} x, \text{ αν } y=1 \\ y, \text{ αν } x=1 \\ 0, \text{ οπουδήποτε αλλού} \end{cases}$ (*δραστική*)

- Έστω μια ***t-norm*** **T** τότε: $T_4 \leq \mathbf{T} \leq T_1$

(Λογική και Συλλογιστική)

- ***Διάζευξη*** δύο προτάσεων P, Q ονομάζουμε την πρόταση «P ή Q» ($P \vee Q$), η οποία είναι ψευδής όταν και οι δύο προτάσεις P, Q είναι ψευδείς και αληθής σε οποιαδήποτε άλλη περίπτωση.

  $\vee : \{0,1\} \times \{0,1\} \to \{0,1\}$

(Λογική και Συλλογιστική)

- Οι πλέον δημοφιλείς ***ασαφείς διαζεύξεις*** είναι οι γνωστές ως “***t-conorms***” (***τριγωνικές συ-νόρμες***).
- Μια διμελής πράξη **S**:[0,1]×[0,1]→[0,1] καλείται ***t-conorm*** αν ικανοποιεί, κατ’ ελάχιστο, τις παρακάτω ιδιότητες, ∀x,y,z∈[0,1].
- Δ1. **S**(x,0)=x (*συνοριακή συνθήκη*)
- Δ2. **S**(x,y) ≤ **S**(x,z) εάν y ≤ z (*μονότονη*)
- Δ3. **S**(x,y) = **S**(y,x) (*αντιμεταθετική*)
- Δ4. **S**(**S**(x,y),z) = **S**(x, **S**(y,z)) (*προσεταιριστική*)

(Λογική και Συλλογιστική)

- Παραδείγματα ***t-conorms***

- $\mathbf{S}_1(x,y) = max(x,y)$ (*συνήθης*)
- $\mathbf{S}_2(x,y) = x+y-xy$ (*αλγεβρικό άθροισμα*)
- $\mathbf{S}_3(x,y) = \min(1, x+y)$ (*φραγμένο άθροισμα*)
- $\mathbf{S}_4(x,y) = \begin{cases} x, & \text{αν } y = 0 \\ y, & \text{αν } x = 0 \\ 1, & \text{οπουδήποτε αλλού} \end{cases}$ (*δραστική*)

- Έστω μια ***t-conorm*** **S** τότε: $\mathbf{S}_1 \leq \mathbf{S} \leq \mathbf{S}_4$

(Λογική και Συλλογιστική)

- ***Άρνηση*** μιας πρότασης P ονομάζουμε την πρόταση «όχι P » ($\neg P$) η οποία είναι αληθής όταν η P είναι ψευδής και ψευδής όταν η P είναι αληθής.

- Η ***ασαφής άρνηση / ασαφές συμπλήρωμα*** (***fuzzy negation / fuzzy complement***) είναι μια συνάρτηση **n**:[0,1]→[0,1] που ικανοποιεί, κατ' ελάχιστο, τις παρακάτω δύο προϋποθέσεις:
- η συνάρτηση **n** είναι φθίνουσα,
- **n**(0)=1, **n**(1)=0.

(Λογική και Συλλογιστική)

- Μια συνάρτηση **n**:[0,1]→[0,1] καλείται ***ισχυρή*** (***ασαφής***) ***άρνηση*** (***strong negation***) εάν πληροί τις παρακάτω προϋποθέσεις:
- η συνάρτηση **n** είναι συνεχής,
- η συνάρτηση **n** είναι γνησίως φθίνουσα,
- **n**(0)=1 και **n**(1)=0,
- **n**(**n**(x))= x, ∀x∈[0,1].

(Λογική και Συλλογιστική)

- <u>Παραδείγματα *ασαφών αρνήσεων*</u>

- *κλάση* ***Sugeno***: **n**(x)=(1- x)/(1+ax), ∀x∈[0,1], όπου η παράμετρος a∈(-1,+∞).

- *κλάση* ***Yager***: **n**(x)=$(1- x^{a})^{1/a}$, ∀x∈[0,1] και a∈(0,+∞).

(Λογική και Συλλογιστική)

- ***Συνεπαγωγή*** δύο προτάσεων *P*, *Q*, ονομάζουμε την πρόταση *"αν P τότε Q"* ($P \Rightarrow Q$), η οποία είναι ψευδής όταν η *P* είναι αληθής και η *Q* ψευδής και αληθής σε κάθε άλλη περίπτωση.

- Η ***ασαφής συνεπαγωγή*** (***fuzzy implication***) είναι μια απεικόνιση $\boldsymbol{I}:[0,1]\times[0,1]\rightarrow[0,1]$ που ικανοποιεί τον πίνακα τιμών αλήθειας της κλασικής συνεπαγωγής όταν το διάστημα [0,1] περιορισθεί στο σύνολο {0,1}.

(Λογική και Συλλογιστική)

- Οι παρακάτω ιδιότητες των ασαφών συνεπαγωγών είναι γενικεύσεις ιδιοτήτων της κλασικής συνεπαγωγής (συχνά αναφέρονται και ως “*λογικά αξιώματα*” των *ασαφών συνεπαγωγών*):

- $x \leq y \Rightarrow \boldsymbol{I}(x,z) \geq \mathbf{I}(y,z)$ (*μονοτονία πρώτου ορίσματος*)
- $x \leq y \Rightarrow \boldsymbol{I}(z,x) \leq \boldsymbol{I}(z,y)$ (*μονοτονία δεύτερου ορίσματος*)
- $\boldsymbol{I}(0,x) = 1$ (*υπεροχή της «ψευδής»*)
- $\boldsymbol{I}(1,y) = y$ (*ουδετερότητα της «αληθής»*)
- $\boldsymbol{I}(x,x) = 1$ (*ταυτοτική*)
- $\boldsymbol{I}(x, \boldsymbol{I}(y,z)) = \boldsymbol{I}(y, \boldsymbol{I}(x,z))$ (*εναλλαγή*)
- $\boldsymbol{I}(x,y) = 1$ αν και μόνο αν $x \leq y$ (*συνοριακή συνθήκη*)
- $\boldsymbol{I}(x,y) = \boldsymbol{I}(\mathbf{n}(y), \mathbf{n}(x))$ (*αντιθετοαντιστροφή*)
- η $\boldsymbol{I}$ είναι συνεχής συνάρτηση (*συνέχεια*)

(Λογική και Συλλογιστική)

Ορισμός ***ασαφούς συνεπαγωγής*** σύμφωνα με τους *Fodor* και *Roubens*:

- ***Ασαφής συνεπαγωγή*** είναι μια απεικόνιση $\boldsymbol{I}:[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$ που ικανοποιεί τον λογικό πίνακα της κλασικής συνεπαγωγής όταν το [0,1] περιορίζεται στο {0,1} και επιπλέον ικανοποιεί τις ιδιότητες:
- $x \leq y \Rightarrow \boldsymbol{I}(x,z) \geq \mathbf{I}(y,z)$
- $x \leq y \Rightarrow \boldsymbol{I}(z,x) \leq \boldsymbol{I}(z,y)$
- $\boldsymbol{I}(0,x) = 1$
- $\boldsymbol{I}(x,1) = 1$

(Λογική και Συλλογιστική)

- Στη κλασική (δίτιμη) λογική, η λογική ισοδυναμία

$a \Rightarrow b \equiv \neg a \vee b, \forall a, b \in \{0,1\}$ (1)

μπορεί να εκφρασθεί ισοδύναμα ως:

$a \Rightarrow b \equiv max\{\mathrm{x} \in \{0,1\} \mid a \wedge \mathrm{x} \leq b\}$ (2)

$a \Rightarrow b \equiv \neg a \vee (a \wedge b)$ (3)

(Λογική και Συλλογιστική)

- Οι επεκτάσεις των παραπάνω σχέσεων (1), (2), και (3) στην *ασαφή λογική* είναι, $\forall a, b \in [0,1]$, αντίστοιχα:

  $\boldsymbol{I}_S(a,b) = \mathbf{S}(\,\mathbf{n}(a), b)$ (1')

  $\boldsymbol{I}_R(a,b) = \sup\{\mathrm{x} \in [0,1] \mid \mathbf{T}(a, \mathrm{x}) \leq b\}$ (2')

  $\boldsymbol{I}_{QL}(a,b) = \mathbf{S}(\,\mathbf{n}(a), \mathbf{T}(a,b))$ (3')

(Λογική και Συλλογιστική)

- Στους τύπους (1'), (2') και (3'), οι **S** και **T** είναι δυικές σε σχέση με την **n**. Δηλαδή, $\forall a, b \in [0,1]$ ισχύει:

$$\mathbf{S}(a,b) = \mathbf{n}(\,\mathbf{T}(\mathbf{n}(a),\mathbf{n}(b))\quad \text{και} \quad \mathbf{T}(a,b) = \mathbf{n}(\mathbf{S}(\mathbf{n}(a),\mathbf{n}(b))$$

(*Νόμοι De Morgan*)

(Λογική και Συλλογιστική)

- *Παραδείγματα S-ασαφών συνεπαγωγών*

- Επιλέγοντας για *t-conorm* την *max*, προκύπτει η ασαφής συνεπαγωγή:
  $\boldsymbol{I}_s(a,b) = max(1-a, b)$ (*Kleene-Dienes*)

- Επιλέγοντας για *t-conorm* το «*φραγμένο άθροισμα*», προκύπτει η ασαφής συνεπαγωγή:
  $\boldsymbol{I}_s(a,b) = min(1,1-a+b)$ (*Łukasiewicz*)

- <u>*Παραδείγματα R-ασαφών συνεπαγωγών*</u>

- Επιλέγοντας για *t-norm* την *min*, προκύπτει η ασαφής συνεπαγωγή:

$$\boldsymbol{I}_R(a,b) = \begin{cases} 1, \text{ όταν } a \le b \\ b, \text{ όταν } a > b \end{cases} \qquad (\textit{Gödel})$$

- Επιλέγοντας για *t-norm* την *φραγμένη διαφορά*, προκύπτει η ασαφής συνεπαγωγή:
$\boldsymbol{I}_R(a,b) = \min(1,1-a+b)$ (*Łukasiewicz*)

(Λογική και Συλλογιστική)

- *Παραδείγματα QL- ασαφών συνεπαγωγών*

- Επιλέγοντας για *t-norm* την *min* και για *t-conorm* την *max* προκύπτει η ασαφής συνεπαγωγή:
  $\boldsymbol{I}_{QL}(a,b)= max[1-a, min(a,b)]$ (*Zadeh*)

- Επιλέγοντας για *t-norm* το *αλγεβρικό γινόμενο* και για *t-conorm* το *αλγεβρικό άθροισμα* προκύπτει η ασαφής συνεπαγωγή:
  $\boldsymbol{I}_{QL}(a,b) = 1- a + a^2 b$

(Λογική και Συλλογιστική)

- *Άσκηση*

  Δίνεται ο *βαθμός διάταξης* $\sigma_v(a,b)=v(b)\ /\ v(a \vee b)$, όπου $a \in [01]$ και $b \in (0,1]$. Θέτουμε $v(\mathrm{x})$ = x και ορίζουμε $\sigma_v(a,b)=1$ όταν $a = b = 0$.
  i) Να δειχθεί ότι η σ_v είναι μια ασαφής συνεπαγωγή.
  ii) Η σ_v είναι ασαφής συνεπαγωγή σύμφωνα με τον ορισμό των *Fodor* και *Roubens* ?
  ii) Ποια από τα "*λογικά αξιώματα*" των ασαφών συνεπαγωγών (και με ποιες προϋποθέσεις) ικανοποιεί ?

(Λογική και Συλλογιστική)

- Έστω ($\mathbf{L}$,$\vee$,$\wedge$,*O*, *I*) ένα πλήρες πλέγμα με ελάχιστο και μέγιστο στοιχείο τα *O* και *I*, αντίστοιχα. Έστω “ ' ” μια συνάρτηση δυϊκού ισομορφισμού, και έστω μια συνάρτηση $\rightarrow: \mathbf{L}\times\mathbf{L} \rightarrow \mathbf{L}$

  *Η δομή ($\mathbf{L}$,$\vee$,$\wedge$,',O,I) καλείται **άλγεβρα συνεπαγωγών πλέγματος (lattice implication algebra)**, εάν ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες* $\forall$x,y,z$\in\mathbf{L}$:

(Λογική και Συλλογιστική)

- (I1) $x \to (y \to z) = y \to (x \to z)$
- (I2) $x \to x = I$
- (I3) $x \to y = y' \to x'$
- (I4) Εάν $x \to y = y \to x = I$ τότε $x = y$
- (I5) $(x \to y) \to y = (y \to x) \to x$
- (L1) $(x \vee y) \to z = (x \to z) \wedge (y \to z)$
- (L2) $(x \wedge y) \to z = (x \to z) \vee (y \to z)$

(Λογική και Συλλογιστική)

- <u>*Παράδειγμα*</u>

Έστω $(\mathbf{L},\vee,\wedge,')$ ένα πλέγμα Boole.

Ορίζουμε τη πράξη $\rightarrow$ ως εξής: $x \rightarrow y = x' \vee y$, $\forall x,y \in \mathbf{L}$.

Η δομή $(\mathbf{L},\vee,\wedge,',\rightarrow)$ είναι *άλγεβρα συνεπαγωγών πλέγματος*

- *Παράδειγμα*

  Έστω **L** =[0,1] , με πράξεις $\vee$, $\wedge$, ', και $\to$ που ορίζονται $\forall x,y,z\in$ **L** ως εξής:

  $x \vee y = \max\{x, y\}$,
  $x \wedge y = \min\{x, y\}$,
  $x' = 1 - x$
  $x \to y = \min\{1, 1 - x + y\}$.

  Η δομή $([0,1],\vee,\wedge,', \to,0,1)$ είναι μια *άλγεβρα συνεπαγωγών πλέγματος*, γνωστή και ως ***άλγεβρα Łukasiewicz*** πάνω στο διάστημα [0,1].

- *Παράδειγμα*

Έστω **L** = $\{a_i \mid i=1,2,\ldots,n\}$, με πράξεις $\vee$, $\wedge$, $'$, και $\rightarrow$ που ορίζονται για κάθε $1 \leq j,k \leq n$, ως εξής:

$$a_j \vee a_k = a_{\max\{j,k\}} \qquad a_j \wedge a_k = a_{\min\{j,k\}}$$

$$(a_j)' = a_{n-j+1} \qquad a_j \rightarrow a_k = a_{\min\{n-j+k,n\}}$$

Η δομή (**L**,$\vee$,$\wedge$,$'$, $\rightarrow$, a_1,a_n) είναι μια *άλγεβρα συνεπαγωγών πλέγματος* και μια *άλγεβρα Łukasiewicz* πάνω στην πεπερασμένη αλυσίδα $a_1,a_2,\ldots,a_n$.

Τυποποιημένη Ανάλυση Εννοιών

- Η ***τυποποιημένη ανάλυση εννοιών*** (ΤΑΕ) (***formal concept analysis*** (FCA)) είναι μια επιστημονική μεθοδολογία που συνήθως μελετά έναν πίνακα συμφραζόμενων.

- Το σύνολο των τυποποιημένων εννοιών σε μια τριάδα τυποποιημένων συμφραζόμενων είναι ένα πλήρες πλέγμα.

- Εφαρμογές της ΤΑΕ συχνά προτείνονται για ***ανάκτηση*** (***retrieval***) πληροφοριών σε ***βάσεις δεδομένων*** (***data bases***).

Μαθηματική Μορφολογία

- Η εφαρμογή τεχνικών ΜΜ τυπικά μεθοδεύεται κάνοντας χρήση ενός δισδιάστατου ***δομικού στοιχείου*** (***structure element***), το οποίο σαρώνει μια ψηφιακή εικόνα εφαρμόζοντας τους *τελεστές*:
διαστολή (***dilation***),
διάβρωση (***erosion***),
άνοιγμα (***opening***),
κλείσιμο (***closing***),
με σκοπό να απομακρύνει θόρυβο από την εικόνα ή / και να ταυτοποιήσει ενδιαφέροντα ***πρότυπα*** (***patterns***) πάνω στην εικόνα.

(Μαθηματική Μορφολογία)

- Δοθέντων δύο πλήρων πλεγμάτων $(L,\sqsubseteq)$ και $(M,\sqsubseteq)$ οι τελεστές *διάβρωση* ε: $L \rightarrow M$ και *διαστολή* δ: $L \rightarrow M$ ορίζονται αντίστοιχα ως: $\varepsilon(\wedge M)=\wedge\varepsilon(M)$ και $\delta(\vee M)=\vee\delta(M)$, όπου $\varepsilon(M)$ και $\delta(M)$ συμβολίζουν τα σύνολα $\{\varepsilon(a)|\ a\in M\}$ και $\{\delta(a)|\ a\in M\}$, αντίστοιχα.

- Οι πράξεις *διαστολή* και *διάβρωση* είναι *δυϊκά συμπληρωματικές*.
  Η διαστολή ενός συνόλου ισοδυναμεί με τη διάβρωση του συμπληρώματος του συνόλου, με δομικό στοιχείο το ανάστροφο δομικό στοιχείο.

Συγκριτικά Σχόλια

- Από τις τρεις μεθοδολογίες χρήσης μαθηματικών πλεγμάτων που παρουσιάστηκαν η *Μαθηματική Μορφολογία*, προς το παρόν, έχει την μεγαλύτερη συνάφεια με την ΥΝ.

- Η *Λογική / Συλλογιστική* και η *Τυποποιημένη Ανάλυση Εννοιών* βασίζονται στο σημασιολογικό ορισμό πλέγματος και κάνουν χρήση κυρίως της δυαδικής σχέσης *μερική διάταξη*, ενώ η *Μαθηματική Μορφολογία* βασίζεται στον αλγεβρικό ορισμό πλέγματος και κάνει χρήση κυρίως των δυαδικών πράξεων *συνένωση* και *διατομή*.

Στοιχεία Επικοινωνίας

Δρ. Ανέστης Γ. Χατζημιχαηλίδης
email: hatzane@teiemt.gr
Τηλ. 693-815-1768

ΕΥΧΑΡΙΣΤΩ