Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών
"Προηγμένες Τεχνολογίες Υπολογιστών και Πληροφορικής"

Υπολογιστική Νοημοσύνη

Μάθημα 5ο

Δρ. Βασίλειος Γ. Καμπουρλάζος
Δρ. Ανέστης Γ. Χατζημιχαηλίδης

Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής Τ.Ε.
ΤΕΙ Ανατολικής Μακεδονίας και Θράκης

2016-2017

Περιεχόμενα

Διευρυμένη Υπολογιστική Νοημοσύνη (ΥΝ)

- Επεκτάσεις της Κλασικής ΥΝ.
- Μεθοδολογίες Στατιστικές, Πιθανοτήτων, Δυνατοτήτων.
- Μεθοδολογίες με Γράφους.

Μεθοδολογίες Στατιστικές, Πιθανοτήτων, Δυνατοτήτων

- Πολλές μεθοδολογίες της (κλασικής) ΥΝ, συμπεριλαμβανομένων ΤΝΔ, παρουσιάζονται ως στατιστικές μεθοδολογίες.
Στο προαναφερθέν πλαίσιο παρουσιάζουμε ενδεικτικά έναν αριθμό μεθοδολογιών της διευρυμένης ΥΝ.

(Μεθοδολογίες Στατιστικές, Πιθανοτήτων, Δυνατοτήτων)

- Πολλαπλά Μοντέλα.
- Τεχνικές Ομαδοποίησης.
- Τεχνικές της Θεωρίας Τεκμηρίων.

Πολλαπλά Μοντέλα

- **Ασθενής κατηγοριοποιητής:**
  - Δίνει τόσες σωστές απαντήσεις όσες θα έδινε μια τυχαία επιλογή των απαντήσεων.

- **Ισχυρός κατηγοριοποιητής:**
  - Προσεγγίζει το σύνολο των ορθών απαντήσεων με οποιαδήποτε ακρίβεια.

- Η **ώθηση** (ή **σύνολο κατηγοριοποιητών** ή **επιτροπή εμπειρογνωμόνων**) είναι μια μεθοδολογία *μηχανικής μάθησης* για κατηγοριοποίηση που χρησιμοποιεί έναν πληθυσμό από *ασθενείς κατηγοριοποιητές* με στόχο έναν *ισχυρό κατηγοριοποιητή*.

AdaBoost (Adaptive Boosting)

- Είναι ο πλέον γνωστός αλγόριθμος ώθησης.

  Στην απλούστερη εκδοχή θεωρούνται δύο μόνον κατηγορίες στο σύνολο **Y**={0,1}. Στόχος είναι η μάθηση της **υπόθεσης** συνάρτησης **h**: **X**→[0,1]. Η τιμή **h**(**x**) ερμηνεύεται ως η πιθανότητα το **x** να ανήκει στην κατηγορία 1.

Ο αλγόριθμος AdaBoost

- Έστω μια ακολουθία $(\mathbf{x}_1,\mathbf{y}_1),\ldots,(\mathbf{x}_N,\mathbf{y}_N)$, όπου $\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_N$ είναι N δεδομένα και $\mathbf{y}_1,\ldots,\mathbf{y}_N$ οι αντίστοιχες κατηγορίες αυτών, μια κατανομή *D* βαρών πάνω στα N δεδομένα , ένας ασθενής κατηγοριοποιητής **WeakLearn**, και ένας ακέραιος T που καθορίζει το πλήθος των επαναλήψεων.
- Αρχικοποίηση των βαρών $w_i^1 = D(i), \quad i = 1,\ldots,N$

(Ο αλγόριθμος AdaBoost)

- Κάνε για **t** = 1,2,...,T

1. Όρισε το διάνυσμα κατανομής $\mathbf{p}^t = \dfrac{\mathbf{w}^t}{\sum_{i=1}^{N} w_i^t}$
2. Κάλεσε τον **WeakLearn** με την κατανομή $\mathbf{p}^t$. Κατέγραψε την **h**: **X**→[0,1].
3. Υπολόγισε το σφάλμα $\varepsilon_t = \sum_{i=1}^{N} p_i^t \left| h_t(x_i) - y_i \right|$
4. Όρισε $\beta_t = \varepsilon_t/(1-\varepsilon_t)$
5. Όρισε τα νέα βάρη ως $w_i^{t+1} = w_i^t \beta_t^{1-\left|h_t(x_i)-y_i\right|}$

Τελική υπόθεση $h_f(x)=1$, αν και μόνον αν

$$\sum_{t=1}^{T} (\log 1/\beta_t) h_t(x) \geqslant \frac{1}{2} \sum_{t=1}^{T} (\log 1/\beta_t)$$

(Ο αλγόριθμος AdaBoost)

- Μετά την εισαγωγή ενός ασθενούς κατηγοριοποιητή, επανα-υπολογίζεται η κατανομή πιθανότητας πάνω στο υποσύνολο εκπαίδευσης έτσι ώστε για κάθε δεδομένο το οποίο κατηγοριοποιείται λανθασμένα (ορθά) αυξάνεται (μειώνεται) η βαρύτητα. Έτσι, οι κατηγοριοποιητές επικεντρώνονται στο να μάθουν δεδομένα που κατηγοριοποιούν λανθασμένα.

Εναλλακτικοί Αλγόριθμοι Ώθησης

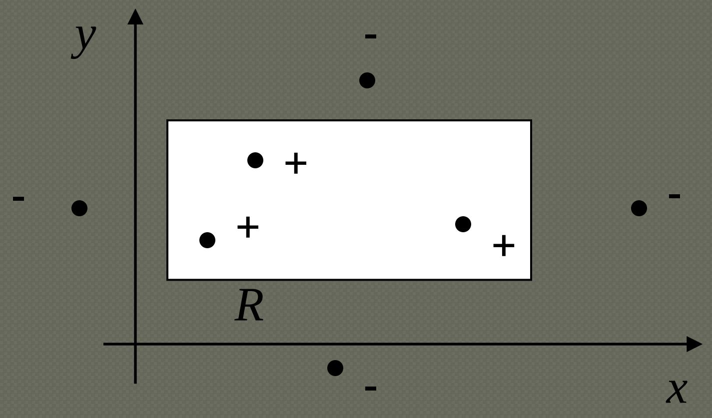
- Ο αλγόριθμος **ενεργής μάθησης** ορίζει ένα βέλτιστο υποσύνολο εκπαίδευσης X^{ε} στοχεύοντας στην μεγιστοποίηση της *ικανότητας γενίκευσης*, τυπικά σε προβλήματα κατηγοριοποίησης.

- Ο αλγ. **πολλαπλής δειγματοποθέτησης (bagging)** παράγει, m νέα υποσύνολα εκπαίδευσης D_i, i∈{1,...,m} ιδίου μεγέθους n' έκαστο. Εάν $n'=n$ τότε, για μεγάλες τιμές του n, ένα υποσύνολο D_i, i∈{1,...,m} αναμένεται να έχει ένα ποσοστό 1-(1/e) (περίπου) 63.2% των δεδομένων του διαφορετικά μεταξύ τους.

- Στη συνέχεια χρησιμοποιούνται m διαφορετικά μοντέλα κάθε ένα από τα οποία εκπαιδεύεται με ένα διαφορετικό υποσύνολο D_{i}, $\mathbf{i}\in\{1,\ldots,m\}$. Οι έξοδοι των m μοντέλων συνδυάζονται είτε υπολογίζοντας τον μέσο όρο αυτών (για εφαρμογές παλινδρόμησης) είτε με ψηφοφορία (για εφαρμογές κατηγοριοποίησης).

Πιθανώς Ορθό κατά Προσέγγιση

- Παράδειγμα
  Επιλέγουμε σημεία στο επίπεδο σύμφωνα με μια κατανομή πιθανότητας D.

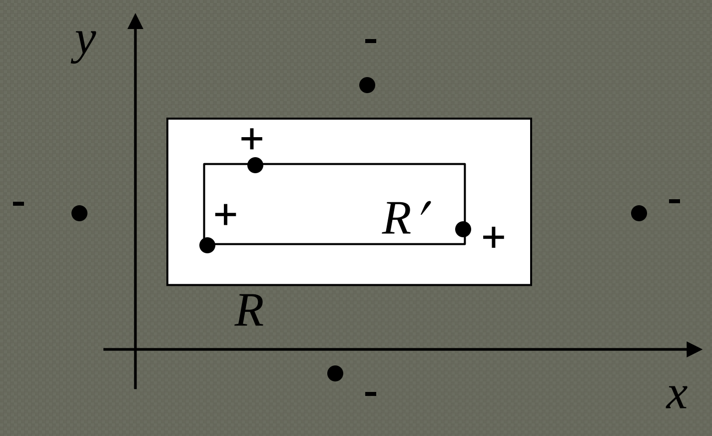


(Πιθανώς Ορθό κατά Προσέγγιση)

- Θεωρούμε την συνάρτηση $R(.)$ έτσι ώστε $R(p) = 1$ αν και μόνο αν το σημείο p είναι εντός του R, διαφορετικά $R(p) = 0$. Ο σκοπός είναι να επιλέξουμε ικανό αριθμό δειγμάτων $(p, R(p))$ προκειμένου να υπολογίσουμε ένα ορθογώνιο R' το οποίο να είναι μια αποδεκτή προσέγγιση του R.

(Πιθανώς Ορθό κατά Προσέγγιση)

- Συγκεκριμένα, το R' ορίζεται ως το ελάχιστο ορθογώνιο το οποίο περιέχει όλα τα θετικά δείγματα (+).



(Πιθανώς Ορθό κατά Προσέγγιση)

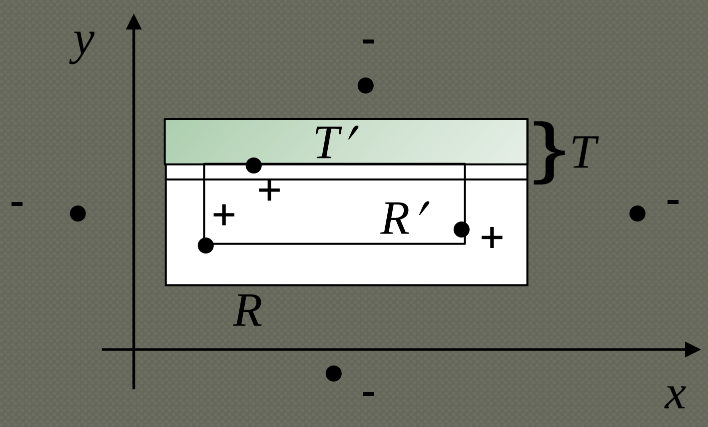
- Ορίζουμε ως **σφάλμα** της προσέγγισης του R με το R' την πιθανότητα ένα σημείο p του επιπέδου που επιλέχθηκε σύμφωνα με την κατανομή D να ανήκει στην περιοχή R-R'.

(Πιθανώς Ορθό κατά Προσέγγιση)

- Θα δείξουμε ότι για οποιοδήποτε R και για οσοδήποτε μικρές τιμές 0<ε και 0<δ<1/2 μπορούμε να υπολογίσουμε έναν ελάχιστο αριθμό m δειγμάτων ζευγών $(p, R(p))$ ώστε με πιθανότητα τουλάχιστον 1-δ, το σφάλμα προσέγγισης του R με το R' να είναι μικρότερο από ε.

(Πιθανώς Ορθό κατά Προσέγγιση)

- Θεωρούμε την λωρίδα T' εντός του R η οποία ορίζεται από τις άνω πλευρές των ορθογώνιων R και R'.



(Πιθανώς Ορθό κατά Προσέγγιση)

- Υποθέτουμε ότι υπάρχει ένας ελάχιστος αριθμός m δειγμάτων ζευγών $(p, R(p))$ τέτοιος ώστε το σφάλμα το οποίο αντιστοιχεί στην λωρίδα $\mathbf{T}'$ να είναι λιγότερο από ε/4.
- Έστω η λωρίδα $T \supseteq \mathbf{T}'$ η οποία αντιστοιχεί ακριβώς σε σφάλμα ε/4. Υπάρχουν τέσσερα ζεύγη από λωρίδες T και $\mathbf{T}'$.

(Πιθανώς Ορθό κατά Προσέγγιση)

- Η πιθανότητα ότι ένα σημείο p δεν θα είναι πάνω στη λωρίδα T είναι 1-ε/4. Άρα, η πιθανότητα ότι m ανεξάρτητες επιλογές δεν θα είναι πάνω στην T είναι $(1\text{-}ε/4)^m$. Συνεπώς, η πιθανότητα ότι δεν θα είναι πάνω στην Τ′ είναι το πολύ $(1\text{-}ε/4)^m$. Τελικά, η πιθανότητα ότι m ανεξάρτητες επιλογές δεν θα είναι πάνω σε κάποια από τις 4 λωρίδες Τ′ είναι το πολύ $4(1\text{-}ε/4)^m$.

(Πιθανώς Ορθό κατά Προσέγγιση)

- Επιλέγουμε έναν αριθμό m δειγμάτων που να ικανοποιεί την σχέση $4(1\text{-}\varepsilon/4)^m \leq \delta$.

- Προκύπτει $m \geq (4/\varepsilon)\mathbf{ln}(4/\delta)$, όπως υπολογίζεται στη συνέχεια.

(Πιθανώς Ορθό κατά Προσέγγιση)

- Συγκεκριμένα, επιλέγουμε τον m έτσι ώστε να ισχύει $4\exp(-\varepsilon m/4) \leq \delta \Leftrightarrow m \geq (4/\varepsilon)\ln(4/\delta)$.
- Λόγω της γνωστής ανισότητας $(1-x) \leq e^{-x}$ έπεται

$$4(1-\varepsilon/4)^m \leq 4\exp(-\varepsilon m/4)$$

- Συνεπώς, για $m \geq (4/\varepsilon)\ln(4/\delta)$ προκύπτει

$$4(1-\varepsilon/4)^m \leq 4\exp(-\varepsilon m/4) \leq \delta$$

Ορισμός
Πιθανώς Ορθό κατά Προσέγγιση

- Έστω X ένα σύνολο δεδομένων (π.χ. στο προηγούμενο παράδειγμα, X ήταν το σύνολο όλων των σημείων στο επίπεδο).
- Μία **έννοια** c πάνω στο X ορίζεται ως ένα υποσύνολο του X, δηλ. $c \subseteq X$ (π.χ. στο προηγούμενο παράδειγμα, μία έννοια c ήταν ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο).

- Έστω **C** το σύνολο όλων των εννοιών τις οποίες μπορεί να μάθει μια συγκεκριμένη μηχανή μάθησης (π.χ. στο προηγούμενο παράδειγμα, **C** είναι το σύνολο όλων των ορθογώνιων παραλληλόγραμμων).
- Έστω EX(c, D) μια διαδικασία η οποία κάθε φορά επιστρέφει ένα ζεύγος $(x, c(x))$, όπου το $x \in \mathrm{X}$ επιλέγεται σύμφωνα με την D.

Πιθανώς Ορθό κατά Προσέγγιση (ΠΟΠ)

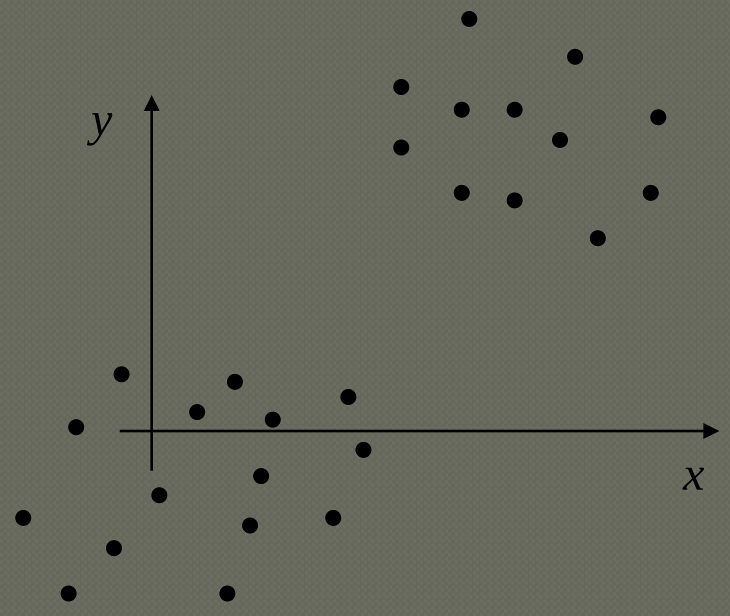
- Ένας αλγόριθμος L μπορεί να μάθει την συλλογή **C** κατά ΠΟΠ εάν ο L έχει την ακόλουθη ιδιότητα: Για κάθε έννοια $c \in$ **C**, για κάθε κατανομή D πάνω στο Χ, για κάθε ε$\in$(0,0.5) και δ$\in$(0,0.5), εάν ο αλγόριθμος L μπορεί λαμβάνει δεδομένα ΕΧ(c, D) τότε με πιθανότητα τουλάχιστον 1-δ μπορεί να υπολογίζει μια έννοια $h \in$ **C** της οποίας το σφάλμα θα είναι μικρότερο από ε.

Τεχνικές Ομαδοποίησης

- Ένα σύνολο δεδομένων για τα οποία δεν είναι γνωστή η κατηγορία στην οποία ανήκουν, επιδιώκεται να χωριστούν σε ομάδες δεδομένων. Με όρους ΥΝ αυτό καλείται *μάθηση χωρίς επίβλεψη*.

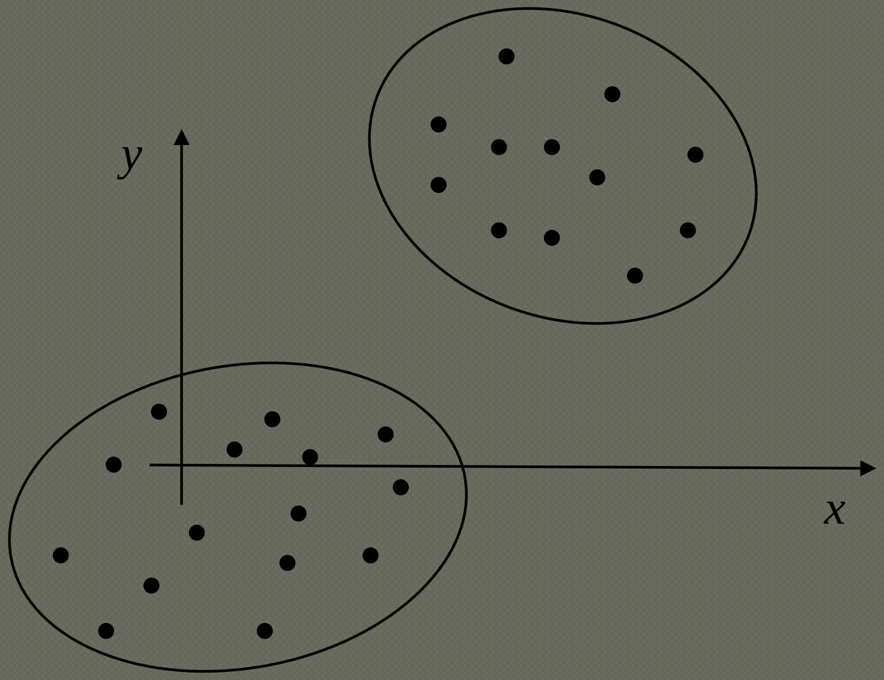
Παραδείγματα Ομαδοποίησης

- Πόσες ομάδες υπάρχουν στο σχήμα;



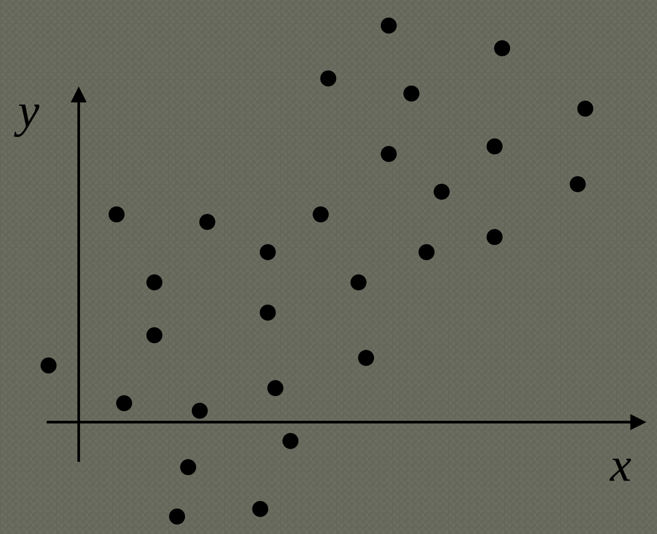
Παραδείγματα Ομαδοποίησης

- Δύο ευδιάκριτες ομάδες.



Παραδείγματα Ομαδοποίησης

- Πόσες ομάδες υπάρχουν στο σχήμα;



Κίνητρα Ομαδοποίησης

1. Όταν η συλλογή δεδομένων είναι “φθηνή”, αλλά ο προσδιορισμός της κατηγορίας είναι “ακριβός”, π.χ. σε αναγνώρισης φωνής. Οπότε, σχεδιάζονται κατηγοριοποιητές με λίγα (κατηγοριοποιημένα) δεδομένα και ρυθμίζονται με πολλά δεδομένα.

2. Για την εύρεση ομάδων δεδομένων και, στη συνέχεια, επικόλληση ετικετών.

3. Για την εύρεση *χαρακτηριστικών* που θα χρησιμοποιηθούν για κατηγοριοποίηση.

Αλγόριθμοι Ομαδοποίησης

Μίξεις πυκνοτήτων (Pearson, 1894).

1. Τα δείγματα προέρχονται από γνωστό αριθμό c κατηγοριών.
2. Οι προγενέστερες πιθανότητες $P(w_j)$ για κάθε κατηγορία, j=1,…c, είναι γνωστές.
3. Οι μορφές των δεσμευμένων ππ $p(\mathbf{x}|w_j,\boldsymbol{\theta}_j)$ για κάθε κατηγορία, j=1,…c, είναι γνωστές.
4. Οι τιμές των $\boldsymbol{\theta}_1,\ldots,\boldsymbol{\theta}_c$ είναι άγνωστες.
5. Η κατηγορία κάθε δείγματος είναι άγνωστη.

(μίξεις πυκνοτήτων)

- Υποθέτουμε ότι ένα δείγμα **x** επιλέγεται τυχαία με την παρακάτω διαδικασία:

1. Επιλέγεται μια κατηγορία w_j με πιθανότητα $P(w_j)$, και
2. Επιλέγεται ένα **x** με πιθανότητα $p(\mathbf{x}/w_j,\boldsymbol{\theta}_j)$.

Συνεπώς, η ολική πυκνότητα πιθανότητας είναι

$$p(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta}) = \sum_{j=1}^{c} p(\mathbf{x}|w_j,\boldsymbol{\theta}_j)P(w_j)$$

(μίξεις πυκνοτήτων)

- Στόχος είναι μια εκτίμηση του διανύσματος παραμέτρων $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\theta}_1, \ldots, \boldsymbol{\theta}_c)^t$ από δείγματα **x**.
- Αφού υπολογίσουμε το **θ** τότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε έναν κατηγοριοποιητή ο οποίος **ενσωματώνει εμπειρία**.

Εκτίμηση μέγιστης πιθανοφάνειας

- Έστω ότι δίδεται ένα σύνολο D={$\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n$} δειγμάτων (χωρίς-ετικέτα) που επιλέχθηκαν τυχαία και ανεξάρτητα από την μίξη πυκνότητας $p(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta}) = \sum_{j=1}^{c} p(\mathbf{x}|w_j,\boldsymbol{\theta}_j)P(w_j)$
- Η συνάρτηση πιθανοφάνειας ορίζεται ως

$$p(\mathrm{D}|\boldsymbol{\theta}) = \prod_{k=1}^{n} p(\mathbf{x}_k|\boldsymbol{\theta})$$

(Εκτίμηση μέγιστης πιθανοφάνειας)

- Η **εκτίμηση μεγίστης πιθανοφάνειας** είναι εκείνη η τιμή του **θ** η οποία μεγιστοποιεί την συνάρτηση πιθανοφάνειας

$$p(\mathrm{D} \mid \boldsymbol{\theta}) = \prod_{k=1}^{n} p(\mathbf{x}_k \mid \boldsymbol{\theta})$$

(Εκτίμηση μέγιστης πιθανοφάνειας)

- Τυπικά υποθέτουμε ότι η $p(\mathrm{D}|\boldsymbol{\theta})$ είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση του $\boldsymbol{\theta}$.
- Έστω l ο λογάριθμος της $p(\mathrm{D}|\boldsymbol{\theta})$ και έστω $\nabla_{\theta_i} l$ ο ρυθμός μεταβολής του l ως προς το $\boldsymbol{\theta}$. Τελικά συνεπάγεται

$$\nabla_{\theta_i} l = \sum_{k=1}^{n} P(w_i \mid \mathbf{x}_k, \boldsymbol{\theta}) \nabla_{\theta_i} \ln p(\mathbf{x}_k \mid \boldsymbol{\theta}_i)$$

(Εκτίμηση μέγιστης πιθανοφάνειας)

- Η **εκτίμηση μέγιστης πιθανοφάνειας** είναι εκείνη η τιμή του **θ** η οποία μηδενίζει την συνάρτηση $\nabla_{\theta_i} l$, δηλ.

$$\sum_{k=1}^{n} P(w_i \mid \mathbf{x}_k, \boldsymbol{\theta}) \nabla_{\theta_i} \ln p(\mathbf{x}_k \mid \boldsymbol{\theta}_i) = 0$$

Παράδειγμα

- Έστω μια (κανονική) μίξη με δύο συνιστώσες

$$p(x \mid \mu_1, \mu_2) = \underbrace{\frac{1}{3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu_1)^2}}_{w_1} + \underbrace{\frac{2}{3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu_2)^2}}_{w_2}$$

- Χρησιμοποιώντας μ_1=-2, μ_2=2 επιλέχθησαν τα ακόλουθα 25 δείγματα

(Παράδειγμα)

δείγμα (w_1/w_2)

k	x_k	*k*	x_k	*k*	x_k
1	0.608 (2)	9	0.262 (2)	17	-3.458 (1)
2	-1.590 (1)	10	1.072 (2)	18	0.257 (2)
3	0.235 (2)	11	-1.773 (1)	19	2.569 (2)
4	3.949 (2)	12	0.537 (2)	20	1.415 (2)
5	-2.249 (1)	13	3.240 (2)	21	1.410 (2)
6	2.704 (2)	14	2.400 (2)	22	-2.653 (1)
7	-2.473 (1)	15	-2.499 (1)	23	1.396 (2)
8	0.672 (2)	16	2.608 (2)	24	3.286 (2)
				25	-0.712 (1)

(Παράδειγμα)

- Χρησιμοποιήσαμε τα δείγματα του πίνακα για να υπολογίσουμε την παρακάτω λογαριθμική συνάρτηση πιθανοφάνειας

$$l(\mu_1, \mu_2) = \sum_{k=1}^{n} \ln p(x_{\mathrm{k}} \mid \mu_1, \mu_2)$$

- Τελικά υπολογίστηκε μ_1=-2.130 και μ_2=1.668.

Αλγόριθμος κ-μέσων Ομαδοποίηση

Αρχικοποίησε τα n, c, $\mathbf{\mu}_1$, $\mathbf{\mu}_2$,…, $\mathbf{\mu}_c$.

1. Επανέλαβε κατηγοριοποίησε τα n δείγματα χρησιμοποιώντας το πλησιέστερο $\mathbf{\mu}_i$.
2. Ξανα-υπολόγισε τα $\mathbf{\mu}_i$.
3. Μέχρι να μην αλλάζουν τα $\mathbf{\mu}_i$.

επέστρεψε τα $\mathbf{\mu}_1$, $\mathbf{\mu}_2$,…, $\mathbf{\mu}_c$.

Τεχνικές της Θεωρίας Τεκμηρίων

Ασθενής λαμβάνει δύο γνώμες γιατρών:

1. Πάσχει μόνο από την ασθένεια Α με πιθανότητα 60% ή μόνο από την Β (30%) ή μόνο από την Γ (10%).
2. Πάσχει μόνο από την ασθένεια Α με πιθανότητα 30% ή μόνο από την Β (20%) ή μόνο από την Γ (50%).

Τώρα πρέπει ο ίδιος ο ασθενής να αποφασίσει ποια θεραπευτική αγωγή θα ακολουθήσει.

Συνάρτηση μάζας (ορισμός)

Έστω X ένα *σύνολο αναφοράς*, και 2^X το *δυναμοσύνολό* του. Ορίζουμε συνάρτηση m: $2^X \to [0,1]$ με το όνομα **συνάρτηση μάζας** με τις ακόλουθες δύο ιδιότητες:

1. $m(\emptyset) = 0$.
2. $\sum_{A \subseteq X} m(A) = 1$.

Διαφορά μάζας από πιθανότητα

- Ένας αυτόπτης μάρτυρας καταθέτει ότι το χρώμα ενός αυτοκινήτου ήταν είτε πράσινο είτε μπλέ ως ακολούθως

	τιμή συνάρτησης μάζας $m(.)$
κανένα χρώμα	0
πράσινο	0.2
μπλε	0.5
πράσινο ή μπλε	0.3

- Παρατηρείστε ότι m(π ή μ) $\neq m$(π) + m(μ) .

Συνδυαστικός κανόνας Dempster

- Έστω m_1: $2^X \to [0,1]$ και m_2: $2^X \to [0,1]$ δύο συναρτήσεις μαζών. Ο *συνδυαστικός κανόνας του Dempster* υπολογίζει την **από κοινού συνάρτηση μάζας** $m_{1,2} = m_1 \oplus m_2$: $2^X \to [0,1]$ έτσι ώστε

1. $\mathbf{m}_{1,2}(\emptyset) = 0$, και
2. $\mathbf{m}_{1,2}(A) = (m_1 \oplus m_2)(A) = \dfrac{1}{1-K} \sum_{B \cap C = A \neq \{\}} m_1(B) m_2(C)$,

όπου $K = \sum_{B \cap C = \{\}} m_1(B) m_2(C)$.

Παράδειγμα 1

- Η Ελένη εκφράζει την επιθυμία να παρακολουθήσει την ταινία X με βεβαιότητα 99% και την ταινία Y με βεβαιότητα 1%, ενώ ο Πάρις εκφράζει την επιθυμία να παρακολουθήσει την ταινία Z με βεβαιότητα 99% και την ταινία Y με βεβαιότητα 1%.

- Τελικά προκύπτει $(m_1 \oplus m_2)(\{Y\}) = 1$ (Αυτό το αποτέλεσμα θεωρείται «διαισθητικό»).

Παράδειγμα 2

- Ένας γιατρός εκτιμά ότι ο ασθενής είτε έχει κακοήθη όγκο στον εγκέφαλο (99%) είτε πάσχει από μηνιγγίτιδα (1%). Ενώ, ένας άλλος γιατρός εκτιμά ότι ο ασθενής είτε έχει πάθει εγκεφαλική διάσειση (99%) είτε πάσχει από μηνιγγίτιδα (1%).

- Προκύπτει $(m_1 \oplus m_2)$({μηνιγγίτιδα }) = 1 (Αυτό το αποτέλεσμα θεωρείται «μη-διαισθητικό»).

Άσκηση

- Το χρώμα αυτοκίνητου ανήκει στο σύνολο {(Κ)όκκινο, (Π)ράσινο, (Μ)πλε}. Δύο μάρτυρες καταθέτουν

	μάζα $\boldsymbol{m_1}$	**μάζα $\boldsymbol{m_2}$**
{ }	0	0
{Κ}	0.05	0.15
{Π}	0	0
{Μ}	0.05	0.05
{Κ, Π}	0.15	0.05
{Κ, Μ}	0.10	0.20
{Π, Μ}	0.05	0.05
{Κ, Π, Μ}	0.60	0.50

Ποια είναι η πιθανότερη εκδοχή χρώματος του αυτοκινήτου σύμφωνα με την συνάρτηση μάζας $\boldsymbol{m}_{1,2}$;

Στοιχεία Επικοινωνίας

Δρ. Βασίλειος Γ. Καμπουρλάζος
vgkabs@teiemt. gr
Τηλ. 6945224802
Γραφείο Β122 (Κτήριο βιβλιοθήκης)

ΕΥΧΑΡΙΣΤΩ