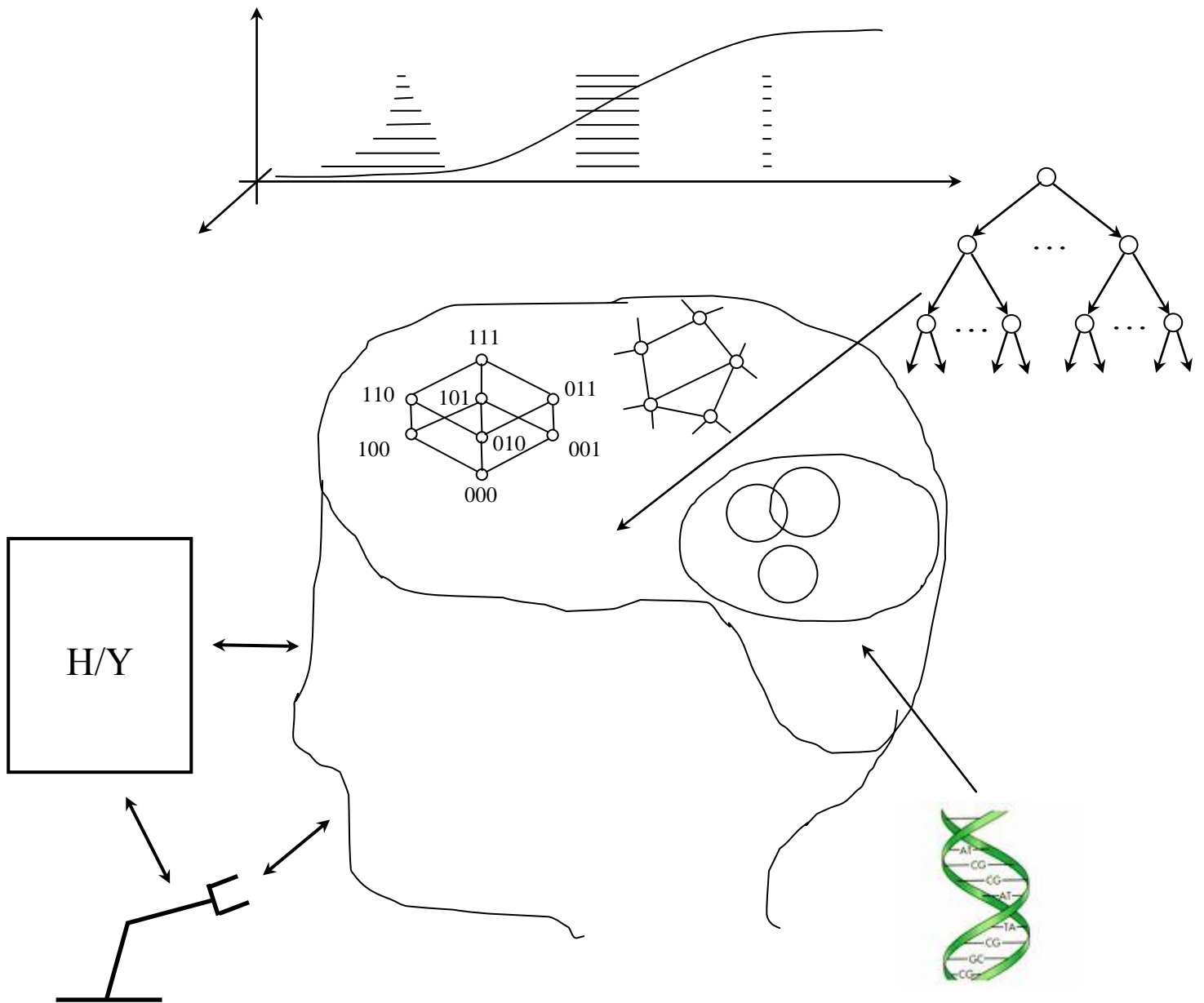


Εισαγωγή στην Υπολογιστική Νοημοσύνη



Δρ. ΒΑΣΙΛΕΙΟΣ ΚΑΜΠΟΥΡΛΑΖΟΣ

Δρ. ΓΕΩΡΓΙΟΣ ΠΑΠΑΚΩΣΤΑΣ

Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής Τ.Ε.

ΤΕΙ Ανατολικής Μακεδονίας και Θράκης

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Κεφάλαιο 0: ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΟ ΒΙΒΛΙΟ

Μέρος-I: Κλασική Υπολογιστική Νοημοσύνη

Εισαγωγή στο Μέρος-I

Κεφάλαιο 1: ΤΕΧΝΗΤΑ ΝΕΥΡΩΝΙΚΑ ΔΙΚΤΥΑ (ΤΝΔ)

- 1.1 Βασικές Έννοιες Νευρωνικού Υπολογισμού
- 1.2 Γραμμικά ΤΝΔ Perceptrons και ο Κανόνας Δέλτα
- 1.3 Δίκτυα Οπισθόδρομης Εκμάθησης
- 1.4 Αυτό-οργανούμενοι Χάρτες
- 1.5 Θεωρία Προσαρμοστικού Συντονισμού
- 1.6 Σύγχρονες Τάσεις

Ερωτήσεις Κατανόησης και Ασκήσεις Κεφαλαίου 1

Βιβλιογραφία Κεφαλαίου 1

Κεφάλαιο 2: ΑΣΑΦΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

- 2.1 Βασικές Έννοιες Ασαφών Συνόλων
- 2.2 Επεκτάσεις Ασαφών Συνόλων
- 2.3 Ασαφής Λογική
- 2.4 Έμφαση σε Κατηγορηματικές Προτάσεις και σε Ασαφείς Αριθμούς
- 2.5 Ασαφή Μοντέλα τύπου Mamdani, και Sugeno
- 2.6 Υπολογισμός με Λέξεις

Ερωτήσεις Κατανόησης και Ασκήσεις Κεφαλαίου 2

Βιβλιογραφία Κεφαλαίου 2

Κεφάλαιο 3: ΕΞΕΛΙΚΤΙΚΟΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ

- 3.1 Βασικές Αρχές Βελτιστοποίησης
- 3.2 Κλασικοί Αλγόριθμοι Βελτιστοποίησης
- 3.3 Βασικές Έννοιες Εξελικτικού Υπολογισμού
- 3.4 Γενετικοί Αλγόριθμοι
- 3.5 Βελτιστοποίηση Σμήνους Σωματιδίων
- 3.6 Εναλλακτικοί Αλγόριθμοι Εξελικτικού Υπολογισμού

Ερωτήσεις Κατανόησης και Ασκήσεις Κεφαλαίου 3

Βιβλιογραφία Κεφαλαίου 3

Μέρος-II: Διευρυμένη Υπολογιστική Νοημοσύνη

Εισαγωγή στο Μέρος-II

Κεφάλαιο 4: ΕΠΕΚΤΑΣΕΙΣ ΤΗΣ ΚΛΑΣΙΚΗΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ ΝΟΗΜΟΣΥΝΗΣ

- 4.1 Νευρο-ασαφή Συστήματα
- 4.2 Δίκτυα Ακτινωτής Βάσης
- 4.3 Δίκτυα k Πλησιέστερων Γειτόνων
- 4.4 Σύγχρονες Τάσεις

Ερωτήσεις Κατανόησης και Ασκήσεις Κεφαλαίου 4

Βιβλιογραφία Κεφαλαίου 4

Κεφάλαιο 5: ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΕΣ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΕΣ, ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ, ΔΥΝΑΤΟΤΗΤΩΝ

5.1 Πολλαπλά Μοντέλα

5.2 Μηχανές Διανυσμάτων Στήριξης

5.3 Πιθανώς Ορθό κατά Προσέγγιση

5.4 Συναρτήσεις Πεποίθησης

Ερωτήσεις Κατανόησης και Ασκήσεις Κεφαλαίου 5

Βιβλιογραφία Κεφαλαίου 5

Κεφάλαιο 6: ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΕΣ ΜΕ ΓΡΑΦΟΥΣ

6.1 Bayesian Δίκτυα

6.2 Δένδρα Αποφάσεων

6.3 Γνωσιακοί Χάρτες

6.4 Οντολογίες

Ερωτήσεις Κατανόησης και Ασκήσεις Κεφαλαίου 6

Βιβλιογραφία Κεφαλαίου 6

Μέρος-III: Μια Ενοποιητική Προσέγγιση στην Υπολογιστική Νοημοσύνη

Εισαγωγή στο Μέρος-III

Κεφάλαιο 7: Η ΘΕΩΡΙΑ ΠΛΕΓΜΑΤΩΝ ΣΤΗΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΝΟΗΜΟΣΥΝΗ

7.1 Ασαφή Πλέγματα

7.2 Επεκτάσεις σε Ιεραρχίες Πλεγμάτων

7.3 Ενοποίηση Ανόμοιων Τύπων Δεδομένων

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Κεφαλαίου 7 (Γενική Θεωρία Πλεγμάτων)

Ερωτήσεις Κατανόησης και Ασκήσεις Κεφαλαίου 7

Βιβλιογραφία Κεφαλαίου 7

Κεφάλαιο 8: ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΕΣ ΣΕ ΠΛΕΓΜΑΤΑ

8.1 Λογική και Συλλογιστική

8.2 Φορμαλιστική Ανάλυση Εννοιών

8.3 Μαθηματική Μορφολογία

Ερωτήσεις Κατανόησης και Ασκήσεις Κεφαλαίου 8

Βιβλιογραφία Κεφαλαίου 8

Κεφάλαιο 9: ΑΡΙΘΜΟΙ ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΩΝ (ΑΔ)

9.1 Μια Δημοφιλής Ιεραρχία Πλεγμάτων

9.2 Αριθμοί Διαστημάτων (ΑΔ)

9.3 Αλγόριθμοι Εφαρμογής ΑΔ

Ερωτήσεις Κατανόησης και Ασκήσεις Κεφαλαίου 9

Βιβλιογραφία Κεφαλαίου 9

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α: Εισαγωγή στην Χρήση MATLAB και Υπολογιστικά Παραδείγματα

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β: Στατιστικές Τεχνικές Αξιολόγησης Μοντέλων Υπολογιστικής Νοημοσύνης

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ: Εφαρμογές της Υπολογιστικής Νοημοσύνης

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΟΡΩΝ

ΓΛΩΣΣΑΡΙ

Μετά την εφεύρεση του ηλεκτρονικού-διακόπτη από τους Shockley, Bardeen και Brattain στα εργαστήρια Bell των Η.Π.Α. το 1947, η εμφάνιση των σύγχρονων ηλεκτρονικών υπολογιστών ήταν θέμα χρόνου. Οι ηλεκτρονικοί υπολογιστές κατέστησαν εφικτή την ταχύτατη αναζήτηση και επεξεργασία δεδομένων με αποτέλεσμα την εμφάνιση ευφυϊών λειτουργιών από μηχανές (βλ. ηλεκτρονικούς υπολογιστές) κατά την έννοια του Turing, δηλαδή, σε συγκεκριμένα προβλήματα, μια μηχανή μπόρεσε να δίνει τόσο καλές απαντήσεις όσο και ένας άνθρωπος.

Στο προαναφερθέν πλαίσιο, περίπου από το 1990 και μετά, εμφανίστηκε ένας αριθμός μεθοδολογιών υπό τον κοινό τίτλο **Υπολογιστική Νοημοσύνη (ΥΝ)**. Συγκεκριμένα, ως Υπολογιστική Νοημοσύνη ορίζουμε μια συνεχώς εξελισσόμενη συνέργια μεθοδολογιών επεξεργασίας αριθμητικών δεδομένων, οι οποίες είναι υλοποιήσιμες σε υπολογιστή για την λήψη αποφάσεων κοινής λογικής. Υπό αυτήν την έννοια, μια τεχνολογία ΥΝ αναμένεται να είναι συμβατή με αρχές της (κοινής) λογικής. Σημειώστε ότι σαν συνώνυμο του όρου ΥΝ στη βιβλιογραφία χρησιμοποιείται ο όρος **Ευέλικτος Υπολογισμός (ΕΥ)**.

Η ΥΝ πλέον αποτελεί ένα βασικό μάθημα του προγράμματος σπουδών ολοένα και περισσότερων τμημάτων Μηχανικών και Πληροφορικής ανά τον κόσμο. Ωστόσο, από την ΥΝ σήμερα απουσιάζει ένα κοινώς αποδεκτό θεωρητικό υπόβαθρο για ανάλυση και σχεδίαση [10]. Επιπλέον, σύγχρονες τεχνολογικές προκλήσεις έχουν εμφανιστεί όπως, για παράδειγμα, ο χειρισμός **τεράστιων δεδομένων**, όπου η ΥΝ καλείται να προτείνει λύσεις. Αυτό το βιβλίο, πέρα από την εισαγωγή σε έναν αριθμό μεθοδολογιών ΥΝ, προτείνει ένα ενοποιητικό θεωρητικό υπόβαθρο στην ΥΝ [9]. Στο προαναφερθέν πλαίσιο επίσης προτείνεται η αντιμετώπιση σύγχρονων τεχνολογικών προκλήσεων.

Είναι ενδιαφέρον να αναφερθούμε στη σχέση της ΥΝ με την (κλασική) Τεχνητή Νοημοσύνη (ΤΝ) [1], [6], η ιστορία της οποίας (της ΤΝ) χαρακτηρίζεται από περιόδους υψηλών προσδοκιών ακολουθούμενες από περιόδους στασιμότητας. Έχει υποστηριχτεί ότι αν ο John McCarthy, ο επονομαζόμενος «πατέρας της ΤΝ», έπρεπε να προτείνει έναν νέο όνομα για την ΤΝ σήμερα, κατά πάσα πιθανότητα, θα πρότεινε τον όρο Υπολογιστική Νοημοσύνη [7]. Ωστόσο, στα πλαίσια αυτού του βιβλίου διαφοροποιούμε την ΥΝ από την ΤΝ ως

ακολουθώς. Η YN, σε τελική ανάλυση, βασίζεται στην επεξεργασία αριθμών. Συγκεκριμένα, μια μεθοδολογία YN μπορεί να λαμβάνει αριθμητικά δεδομένα από ένα ή περισσότερα ηλεκτρονικά όργανα μέτρησης, ενώ όταν θεωρούνται μη-αριθμητικά δεδομένα, η επεξεργασία τους στα πλαίσια της YN τελικά ανάγεται στην επεξεργασία αριθμών. Αντιθέτως, η TN βασίζεται στην επεξεργασία (μη-αριθμητικών) συμβόλων.

Μια κλασική μεθοδολογία YN τυπικά προσομοιώνει (παραμετρικά) κάποια λειτουργία ενός βιολογικού οργάνου /οργανισμού. Για παράδειγμα, μια κλασική μεθοδολογία YN που είναι τα Τεχνητά Νευρωνικά Δίκτυα (ΤΝΔ) προσομοιώνει την λειτουργία του εγκεφάλου. Μια άλλη τέτοια μεθοδολογία που είναι τα Ασαφή Συστήματα (ΑΣ) προσομοιώνει την λειτουργία της ομιλούμενης γλώσσας. Μια περαιτέρω μεθοδολογία YN που είναι ο Εξελικτικός Υπολογισμός (ΕΥ) προσομοιώνει την διαδικασία της φυσικής (δαρβινικής) επιλογής. Οι προαναφερθείσες τρεις μεθοδολογίες αποτελούν το περιεχόμενο της **κλασικής YN**.

Συνδυάζοντας συνεργατικά μεθοδολογίες της κλασικής YN, ή/και αντικαθιστώντας τις επιλεκτικά, προέκυψαν εναλλακτικές μεθοδολογίες YN, οι οποίες, στα πλαίσια αυτού του βιβλίου, αποτελούν το περιεχόμενο της **διευρυμένης YN**. Παραδείγματα τέτοιων μεθοδολογιών αποτελούν τα νευρο-ασαφή συστήματα, δίκτυα ακτινωτής βάσης, μηχανές στήριξης αποφάσεων, γνωσιακοί χάρτες, κλπ. Κάποιες φορές, η (διευρυμένη) YN παρουσιάζεται ως μια συλλογή υπολογιστικών αλγόριθμων χωρίς να είναι προφανής κάποια ουσιαστική σχέση μεταξύ αυτών των αλγόριθμων. Στο Μέρος-III αυτού του βιβλίου, στη βάση ενοποιητικών μαθηματικών αποτελεσμάτων, εξηγείται με ποια έννοια ένας αριθμός υπολογιστικών αλγόριθμων μπορούν να ενταχθούν στο πλαίσιο της YN.

Η έννοια της **συνάρτησης** είναι θεμελιώδους σημασίας – Για τον ακριβή ορισμό βλέπε στο Παράρτημα του κεφαλαίου 7. Το πρακτικό πλεονέκτημα της συνάρτησης είναι ότι μπορεί να υλοποιηθεί στην πράξη. Συγκεκριμένα, ένα δεδομένο εισόδου συστήματος που υλοποιεί μια συνάρτηση απεικονίζεται σε ένα και μόνο ένα δεδομένο εξόδου. Στα πλαίσια αυτού του βιβλίου θα αναφερόμαστε σε μια συνάρτηση με τον εναλλακτικό όρο (*μαθηματικό μοντέλο*). Τυπικό στόχο ενός αλγόριθμου YN αποτελεί η εκτίμηση μιας συνάρτησης $f: \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{T}$, όπου το πεδίο ορισμού \mathbf{R} είναι το σύνολο των πραγματικών αριθμών, ενώ το πεδίο τιμών \mathbf{T} μπορεί να είναι είτε $\mathbf{T} = \mathbf{R}^M$ (σε προβλήματα παλινδρόμησης) είτε ένα σύνολο από ετικέτες (σε προβλήματα αναγνώρισης) [8], όπως εξηγείται στη συνέχεια.

Δοθέντος ενός συνόλου ζευγών $(x_1, f(x_1)), \dots, (x_n, f(x_n))$, ο σκοπός ενός τυπικού μοντέλου YN είναι να υπολογίσει μια βέλτιστη προσέγγιση $\hat{f} : \mathbb{R}^N \rightarrow T$ της συνάρτησης $f: \mathbb{R}^N \rightarrow T$ έτσι ώστε για $x_0 \in \mathbb{R}^N$, με $x_0 \neq x_i, i \in \{1, \dots, n\}$, το εκτιμώμενο $\hat{f}(x_0)$ να είναι όσο δυνατόν πιο «κοντά», υπό κάποια έννοια, στο πραγματικό $f(x_0)$. Η διαδικασία υπολογισμού της συνάρτησης $\hat{f} : \mathbb{R}^N \rightarrow T$ από το σύνολο των ζευγών $(x_1, f(x_1)), \dots, (x_n, f(x_n))$ στα πλαίσια της YN καλείται **μάθηση** ή, ισοδύναμα, **εκπαίδευση**, ενώ η διαδικασία υπολογισμού της τιμής $\hat{f}(x_0)$, για $x_0 \neq x_i, i \in \{1, \dots, n\}$, καλείται **γενίκευση**. Βασικός στόχος κάθε διαδικασίας μάθησης στην YN είναι μια αποδεκτή **ικανότητα γενίκευσης**.

Τα πρώτα βιβλία στην Ελληνική γλώσσα πάνω στην YN δημοσιεύτηκαν την δεκαετίες 1990 και 2000, π.χ. [2], [3]. Ωστόσο, κατά κανόνα, εκείνα τα βιβλία εστίαζαν σε συγκεκριμένες τεχνολογίες YN ή/και σε συγκεκριμένα πεδία εφαρμογής. Για παράδειγμα, το βιβλίο [2] δίνει έμφαση κυρίως σε τεχνολογίες τεχνητών νευρωνικών δικτύων σε εφαρμογές επεξεργασίας σήματος, ενώ το βιβλίο [3] δίνει έμφαση κυρίως σε τεχνολογίες ασαφών συστημάτων σε εφαρμογές αυτόματου ελέγχου. Μεταγενέστερα βιβλία YN στην Ελληνική γλώσσα καταπιάστηκαν πιο «ολιστικά» με την YN, υπό την έννοια ότι παρουσίασαν ποικίλες τεχνολογίες YN [4], [5], με έμφαση κυρίως σε τεχνολογίες της κλασικής YN.

Η YN σήμερα χαρακτηρίζεται από έλλειμμα μιας «ολιστικής» θεωρητικής αντίληψης καθώς και ενός ενοποιητικού τρόπου ανάλυσης και σχεδίασης που να στηρίζουν την παρουσίαση της YN ως μιας διακριτής επιστημονικής περιοχής. Ένα επιπλέον έλλειμμα περιγράφεται στη συνέχεια, αφού θεωρήσουμε τους ακόλουθους ορισμούς: α) **Δεδομένα** είναι μια τυποποιημένη αναπαράσταση γεγονότων την οποία μπορούμε να μεταδώσουμε /επεξεργαστούμε, β) **Πληροφορία** είναι η σημασία που ένας άνθρωπος δίνει στα δεδομένα, και γ) **Γνώση** είναι πιστοποιημένη πληροφορία. Μια μεθοδολογία YN τυπικά μπορεί να επεξεργάζεται δεδομένα, αλλά όχι την σημασία των δεδομένων. Χαρακτηριστικό είναι το παράδειγμα των κλασικών τεχνητών νευρωνικών δικτύων, τα οποία λειτουργούν ως «μαύρα κουτιά» τα οποία κάνουν *άλεσμα αριθμών* χωρίς να έχουν μια βαθύτερη γνώση των δεδομένων που επεξεργάζονται αλλά και χωρίς να μπορούν να εξηγήσουν τις απαντήσεις τους. Η προσέγγιση της YN που περιγράφεται σ' αυτό το βιβλίο προτείνει λύσεις στα προαναφερθέντα ελλείμματα.

Αυτό το βιβλίο χωρίζεται σε τρία μέρη. Στο Μέρος-I παρουσιάζονται οι τρεις κλασικές μεθοδολογίες της ΥΝ. Συγκεκριμένα, στο κεφάλαιο 1 παρουσιάζονται, πρώτα, βασικές έννοιες νευρωνικού υπολογισμού και, στη συνέχεια, δημοφιλείς αρχιτεκτονικές Τεχνητών Νευρωνικών Δικτύων (ΤΝΔ). Σημειώστε ότι μια αρχιτεκτονική ΤΝΔ υλοποιεί παράλληλη και κατανεμημένη επεξεργασία δεδομένων με ικανότητες μάθησης καθώς και γενίκευσης. Στο κεφάλαιο 2 παρουσιάζονται, πρώτα, βασικές έννοιες ασαφών συνόλων και ασαφούς λογικής και, στη συνέχεια, δημοφιλή ασαφή συστήματα (ΑΣ). Σημειώστε ότι τα ΑΣ επιτρέπουν μια μοντελοποίηση της ομιλούμενης γλώσσας με αναπαράσταση της ασάφειας των λέξεων. Στο κεφάλαιο 3 παρουσιάζονται, πρώτα, βασικές έννοιες του Εξελικτικού Υπολογισμού (ΕΥ) και, στη συνέχεια, δημοφιλείς τεχνικές ΕΥ. Σημειώστε ότι ο ΕΥ αποτελεί μια δημοφιλή τεχνική στοχαστικής βελτιστοποίησης που τυπικά χρησιμοποιεί πληθυσμούς συνεργαζόμενων ατόμων.

Στο Μέρος-II παρουσιάζονται επιλεγμένες μεθοδολογίες της διευρυμένης ΥΝ. Συγκεκριμένα, στο κεφάλαιο 4 παρουσιάζονται επεκτάσεις ή/και συνέργειες μεθοδολογιών της κλασικής ΥΝ. Οι προτεινόμενες στο κεφάλαιο 4 μεθοδολογίες μπορούν να επεξεργάζονται αναπαραστάσεις της ασάφειας χρησιμοποιώντας παράλληλες ή/και κατανεμημένες αρχιτεκτονικές ενώ μεθοδολογίες εξελικτικού υπολογισμού χρησιμοποιούνται για βελτιστοποίηση. Στο κεφάλαιο 5 παρουσιάζονται μεθοδολογίες που βασίζονται στην στατιστική καθώς και στην θεωρία πιθανοτήτων ή/και δυνατοτήτων. Σημειώστε ότι οι προαναφερθείσες μεθοδολογίες επιτρέπουν τον χειρισμό μη-αριθμητικών δεδομένων. Στο κεφάλαιο 6 παρουσιάζονται μεθοδολογίες που χρησιμοποιούν γράφους, οι οποίοι (γράφοι) είναι ένα ακόμη παράδειγμα μη-αριθμητικών δεδομένων με ικανότητα αναπαράστασης (μαθηματικών) σχέσεων. Σημειώστε ότι οι μεθοδολογίες ΥΝ, οι οποίες παρουσιάζονται στο Μέρος-II είναι μόνον ενδεικτικές από το πλήθος των μεθοδολογιών που δημοσιεύονται τακτικά στην βιβλιογραφία.

Στο Μέρος-III σκιαγραφείται η **θεωρία διάταξης**, η οποία ιστορικά επινοήθηκε για μοντελοποίηση της λογικής, και προτείνεται μια ενοποίηση ανόμοιων τύπων δεδομένων στη βάση της θεωρίας διάταξης με αποτέλεσμα μια ολιστική παρουσίαση της ΥΝ. Στο ίδιο θεωρητικό πλαίσιο προτείνεται επεξεργασία της σημασιολογίας καθώς και της γνώσης. Συγκεκριμένα, στο κεφάλαιο 7 παρουσιάζονται βασικές έννοιες της θεωρίας διάταξης και, στη συνέχεια, σκιαγραφούνται οι προοπτικές τους για ανάλυση και σχεδίαση στην ΥΝ.

Σημειώστε ότι το μαθηματικό περιεχόμενο αυτού του κεφαλαίου παρουσιάζεται απλοποιημένο για διδακτικούς λόγους. Στο κεφάλαιο 8 παρουσιάζονται τρεις δημοφιλείς υπολογιστικές μεθοδολογίες από τη βιβλιογραφία, οι οποίες βασίζονται στη θεωρία διάταξης, σε συγκεκριμένα πεδία της πληροφορικής τα οποία περιλαμβάνουν ψηφιακή επεξεργασία σήματος, βάσεις δεδομένων και συλλογιστική. Στο κεφάλαιο 9 μελετώνται οι Αριθμοί Διαστημάτων (ΑΔ) και δείχνονται τρόποι γενίκευσης καθώς και βελτίωσης δημοφιλών μεθοδολογιών ΥΝ στη βάση των ΑΔ.

Η βιβλιογραφία παρουσιάζεται ανά κεφάλαιο, με περιορισμένες επικαλύψεις. Στο τέλος αυτού του βιβλίου παρουσιάζονται δύο κατάλογοι, ο πρώτος, είναι ένα ευρετήριο όρων στο βιβλίο και, ο δεύτερος, είναι ένα γλωσσάρι που, για κάθε ελληνικό όρο στο βιβλίο, παρουσιάζει τον αντίστοιχο αγγλικό όρο.

Αυτό το βιβλίο συντάχθηκε στα πλαίσια των δραστηριοτήτων του εργαστηρίου Προμηθείας στο Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής του ΤΕΙ ΑΜΘ φιλοδοξώντας να αποτελέσει ένα χρήσιμο εγχειρίδιο για ανάλυση και σχεδίαση εφαρμογών ΥΝ στην πράξη.

Καβάλα, 30 Σεπτεμβρίου 2015?

Οι συγγραφείς,

Βασίλειος Καμπουρλάζος

Γεώργιος Παπακώστας

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] Ι. Βλαχάβας, Π. Κεφαλάς, Ν. Βασιλειάδης, Φ. Κόκκορας, Η. Σακελλαρίου, *Τεχνητή Νοημοσύνη*, Γ' Έκδοση. Αθήνα: Β. Γκιούρδας Εκδοτική, 2006.
- [2] Κ. Διαμαντάρας, *Τεχνητά Νευρωνικά Δίκτυα*. Κλειδάριθμος, 2007.
- [3] Ρ.-Ε. Κινγκ, *Υπολογιστική Νοημοσύνη στον Έλεγχο Συστημάτων*. Αθήνα: Εκδόσεις Τραυλός, 1998.
- [4] Ι. Μπούταλης, Γ. Συρακούλης, *Υπολογιστική Νοημοσύνη και Εφαρμογές*. Εκδότες οι συγγραφείς, 2010.

- [5] Σ.Γ. Τζαφέστας, *Υπολογιστική Νοημοσύνη: Τόμος Α – Μεθοδολογίες*. Εκδότης ο Συγγραφέας, 2008.
- [6] S. Russell, P. Norvig (μετάφραση Γ. Ρεφανίδης), *Τεχνητή Νοημοσύνη: Μια Σύγχρονη Προσέγγιση*, Β' Έκδοση. Αθήνα: Κλειδάριθμος, 2005.
- [7] S.L. Andresen, "John McCarthy: Father of AI", *IEEE Intel Syst*, vol. 17, no. 5, pp. 84-85, 2002.
- [8] V.G. Kaburlasos, A. Kehagias, "Fuzzy inference system (FIS) extensions based on lattice theory", *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 22, no. 3, pp. 531-546, 2014.
- [9] V.G. Kaburlasos, G.A. Papakostas, "Learning distributions of image features by interactive fuzzy lattice reasoning (FLR) in pattern recognition applications", *IEEE Computational Intelligence Magazine*, vol. 10, no. 3, pp. 42-51, 2015 (Special Issue on *New Trends of Learning in Computational Intelligence*. Guest Editors: Guang-Bin Huang, Erik Cambria, Kar-Ann Toh, Bernard Widrow, Zongben Xu).
- [10] M. M. Polycarpou, "Computational intelligence in the undergraduate curriculum", *IEEE Computational Intelligence Magazine*, vol. 8, no. 2, p. 3, May 2013.

Έχει διατυπωθεί η άποψη ότι η αποτελεσματικότητα της συνεργασίας των ανθρώπων οφείλεται στο ότι οι άνθρωποι επικοινωνούν με (ανακριβείς) έννοιες μάλλον παρά με (ακριβείς) αριθμούς [22]. Σε μια προσπάθεια ανάπτυξης μηχανών που να συνεργάζονται μεταξύ τους τόσο αποτελεσματικά όσο και οι άνθρωποι προτάθηκε η αναπαράσταση μιας **έννοιας** με ένα ασαφές σύνολο καθώς και η εξαγωγή συμπερασμάτων στη βάση μιας ασαφούς λογικής. Έτσι αναπτύχθηκε η θεωρία των ασαφών συνόλων, της ασαφούς λογικής και, τελικά, η τεχνολογία ασαφών συστημάτων που θα παρουσιαστούν σ' αυτό το κεφάλαιο.

2.1 Βασικές Έννοιες Ασαφών Συνόλων

Για την καλύτερη κατανόηση θα χρησιμοποιηθεί συνολοθεωρητική ορολογία. Κατ' αρχήν χρειαζόμαστε ένα σύνολο Ω , το οποίο ονομάζουμε **σύνολο αναφοράς** ή, εναλλακτικά, **βασικό σύνολο**. Ένα **ασαφές σύνολο** A του Ω ταυτίζεται με την **χαρακτηριστική συνάρτησή** του $A: \Omega \rightarrow [0,1]$. Η χαρακτηριστική συνάρτηση $A(x)$ ενός ασαφούς συνόλου A , εναλλακτικά, ονομάζεται **συνάρτηση συμμετοχής** του ασαφούς συνόλου A [20]. Σημειώστε ότι ένα ασαφές σύνολο συμβολίζεται με το ζεύγος (Ω, A) . Ένα ασαφές σύνολο ερμηνεύεται ως **κόκκος πληροφορίας** [6], [22], ο οποίος ορίζεται ως μια ομάδα τιμών που νοούνται ως μια ολότητα εξαιτίας της ομοιότητας, της εγγύτητας ή/και της λειτουργικότητάς τους.

Μια συνάρτηση συμμετοχής $A(x)$ συνήθως ορίζεται υποκειμενικά από κάποιον άνθρωπο. Όμως, αφού η συνάρτηση $A(x)$ οριστεί (υποκειμενικά), την χειριζόμαστε με συγκεκριμένες υπολογιστικές τεχνικές όπως περιγράφεται σ' αυτό το κεφάλαιο.

Ένα ασαφές σύνολο A αναπαριστάνεται ως ένα σύνολο διατεταγμένων ζευγών

$$A = \{(x, A(x)) \mid x \in \Omega \text{ και } A(x) \in [0,1]\} \quad (2.1)$$

όπου το $A(x)$ δείχνει τον βαθμό κατά τον οποίο το x είναι μέλος του ασαφούς συνόλου A .

Εναλλακτικά, ένα ασαφές σύνολο A μπορεί να αναπαρασταθεί ως $A = \left\{ \frac{A(x)}{x} \mid x \in \Omega \text{ και } A(x) \in [0,1] \right\}$. Σημειώστε ότι όταν το Ω είναι αριθμήσιμο (πχ. πεπερασμένο) σύνολο τότε το

ασαφές σύνολο A γράφεται: $A = \sum_{i=1}^n \frac{A(x_i)}{x_i}$, όπου το σύμβολο Σ δεν σημαίνει αλγεβρική

πρόσθεση αλλά συνολοθεωρητική ένωση (\cup). Ενώ, όταν το Ω είναι μη-αριθμήσιμο (πχ. $\Omega =$

$[0,1]$) τότε το ασαφές σύνολο A γράφεται: $A = \int_{\Omega} \frac{A(x)}{x}$ όπου το σύμβολο \int δεν έχει την έννοια του ολοκληρώματος αλλά έχει την έννοια της επέκτασης της προαναφερθείσης συνολοθεωρητικής ένωσης (\cup) στο συνεχές.

Παράδειγμα Α

Θεωρήστε το βασικό σύνολο Ω οπωρολαχανικών που ακολουθεί

$$\Omega = \{\text{μήλο, αχλάδι, κεράσι, μαρούλι, ντομάτα}\}$$

Μπορούμε να ορίσουμε το ασαφές σύνολο $\Pi: \Omega \rightarrow [0,1]$ έτσι ώστε η χαρακτηριστική συνάρτηση $\Pi(x)$ να δείχνει τον βαθμό κατά τον οποίο το οπωρολαχανικό $x \in \Omega$ είναι πράσινο.

Συγκεκριμένα, το ασαφές σύνολο Π θα μπορούσε να είναι το ακόλουθο $\Pi = \{(\text{μήλο}, 0.2), (\text{αχλάδι}, 0.9), (\text{κεράσι}, 0), (\text{μαρούλι}, 1), (\text{ντομάτα}, 0.2)\}$. Εναλλακτικά, σύμφωνα με τα

παραπάνω, το ασαφές σύνολο Π μπορεί να αναπαρασταθεί ως $\Pi = \frac{0.2}{\text{μήλο}} + \frac{0.9}{\text{αχλάδι}} +$

$\frac{0}{\text{κεράσι}} + \frac{1}{\text{μαρούλι}} + \frac{0.2}{\text{ντομάτα}}$, όπου η πράξη “+” δεν σημαίνει αλγεβρική πρόσθεση αλλά

συνολοθεωρητική ένωση (\cup). Ζεύγη $(x, A(x))$, είτε $\frac{A(x)}{x}$, με $A(x)=0$ μπορούν να

παραλειφθούν. Ασφαλώς, οι ακριβείς τιμές που λαμβάνει η συνάρτηση $\Pi(x)$ εξαρτώνται από τον βαθμό της ωρίμανσης του οπωρολαχανικού x σύμφωνα με την υποκειμενική κρίση αυτού που δίδει τιμές στην συνάρτηση $\Pi(x)$. Για παράδειγμα, θα μπορούσε να είναι “ $\Pi(\text{ντομάτα}) = 1$ ” όταν μια ντομάτα είναι εντελώς άγουρη, ενώ να είναι “ $\Pi(\text{ντομάτα}) = 0$ ” όταν μια ντομάτα είναι κατακόκκινη ώριμη. Προφανώς, για κάποιο ενδιάμεσο βαθμό ωρίμανσης θα μπορούσε να είναι “ $\Pi(\text{ντομάτα}) = 0.8$ ” ή “ $\Pi(\text{ντομάτα}) = 0.3$ ” κλπ, κατά την κρίση αυτού που δίδει τιμές στην συνάρτηση $\Pi(x)$.

Ένα κλασικό σύνολο θεωρείται ως ειδική περίπτωση ασαφούς συνόλου όπου το πεδίο τιμών της χαρακτηριστικής συνάρτησης είναι το διμελές σύνολο αριθμών $\{0,1\}$ αντί του κλειστού διαστήματος αριθμών $[0,1]$. Για παράδειγμα, θεωρήστε το ακόλουθο βασικό σύνολο Ω φοιτητών και φοιτητριών

$$\Omega = \{\text{Μαρία, Ελένη, Γιάννης, Κώστας, Νίκη, Γεωργία, Ανδρέας}\}$$

Ένα κλασικό σύνολο K θα μπορούσε περιγραφικά να οριστεί ως το υποσύνολο εκείνο των φοιτητών και φοιτητριών του Ω που έχουν περάσει το μάθημα της Υπολογιστικής Νοημοσύνης. Η χαρακτηριστική συνάρτηση, έστω $K(x)$, του συνόλου K λαμβάνει τιμές στο

διμελές σύνολο $\{0, 1\}$. Έτσι, θα μπορούσε να είναι είτε “ $K(\text{Ελένη}) = 1$ ” είτε “ $K(\text{Ελένη}) = 0$ ”, δηλ. είτε η Ελένη πέρασε το μάθημα «Υπολογιστική Νοημοσύνη» είτε η Ελένη δεν το πέρασε, αντίστοιχα, και οτιδήποτε άλλο αποκλείεται.

2.1.1 Τεχνικά Χαρακτηριστικά Ασαφών Συνόλων

Στη συνέχεια απαριθμούμε μερικά τεχνικά χαρακτηριστικά ασαφών συνόλων.

1) Ονομάζεται **α -διατομή** ενός ασαφούς συνόλου A ως προς σύνολο αναφοράς Ω , το κλασικό σύνολο A_α που ορίζεται ως εξής:

$$A_\alpha = \{x \in \Omega \mid A(x) \geq \alpha\}, \text{ όπου } \alpha \in [0, 1] \quad (2.2)$$

Για $\alpha = 1$, το σύνολο 1-διατομή A_1 ονομάζεται και **πυρήνας** του ασαφούς συνόλου A .

Η αναπαράσταση των α -διατομών θα χρησιμοποιηθεί, σε ένα διαφορετικό θεωρητικό πλαίσιο (από αυτό των ασαφών συνόλων) στο [Μέρος-III](#) αυτού του βιβλίου όπου προτείνεται μια ενοποίηση στην Υπολογιστική Νοημοσύνη.

2) Ονομάζεται **στήριγμα** ή **φορέας** ενός ασαφούς συνόλου A ως προς σύνολο αναφοράς Ω , το κλασικό σύνολο $\text{supp}(A)$ που ορίζεται ως εξής:

$$\text{supp}(A) = \{x \in \Omega \mid A(x) > 0\} \quad (2.3)$$

3) Ονομάζεται **ύψος** ενός ασαφούς συνόλου A ως προς σύνολο αναφοράς Ω , το ελάχιστο άνω φράγμα (sup) των βαθμών συμμετοχής στο A όλων των στοιχείων του A :

$$\text{hgt}(A) = \sup_{x \in \Omega} \{A(x)\} \quad (2.4)$$

Σημειώστε ότι όταν, όπως τυπικά συμβαίνει στην πράξη, το πλήθος των στοιχείων του ασαφούς συνόλου A είναι πεπερασμένο τότε το ελάχιστο άνω φράγμα (sup) αντιστοιχεί στο μέγιστο (max) των βαθμών συμμετοχής στο A όλων των στοιχείων του ασαφούς συνόλου A . Αν $\text{hgt}(A) = 1$ τότε το ασαφές σύνολο A ονομάζεται **κανονικό**. Δηλαδή, ένα κανονικό ασαφές σύνολο A έχει (μη κενό) πυρήνα, συμβολικά $A_1 \neq \emptyset$.

4) Ένα ασαφές σύνολο A ως προς σύνολο αναφοράς Ω ονομάζεται **κενό** ασαφές σύνολο όταν για κάθε $x \in \Omega$ είναι $A(x) = 0$.

5) Δύο ασαφή σύνολα A και B ως προς σύνολο αναφοράς Ω ονομάζονται **ίσα** όταν για κάθε $x \in \Omega$ είναι $A(x) = B(x)$. Ωστόσο, ένας τέτοιος ορισμός της ισότητας κρίθηκε ως αυστηρός από

κάποιους ερευνητές και γι' αυτό το λόγο ορίστηκαν εναλλακτικές (ασαφείς) σχέσεις ισότητας με διαβαθμίσεις.

6) Σχέση *εγκλεισμού* ή, εναλλακτικά, σχέση *υποσυνολότητας*. Για δύο ασαφή σύνολα A και B ως προς (κοινό) σύνολο αναφοράς Ω , λέμε ότι το A είναι υποσύνολο του B (ή ότι το A περιέχεται στο B) και γράφουμε $A \subseteq B$ τότε και μόνον τότε αν $A(x) \leq B(x), \forall x \in \Omega$. Ωστόσο, ένας τέτοιος ορισμός της υποσυνολότητας κρίθηκε ως αυστηρός από κάποιους ερευνητές και γι' αυτό το λόγο ορίστηκαν εναλλακτικές (ασαφείς) σχέσεις υποσυνολότητας με διαβαθμίσεις.

7) Το **ασαφές δυναμοσύνολο** ως προς σύνολο αναφοράς Ω ορίζεται ως το σύνολο όλων των ασαφών υποσυνόλων του Ω , συμβολικά $\mathcal{F}(\Omega) = [0,1]^\Omega = \{A \mid A: \Omega \rightarrow [0,1]\}$.

Οι πράξεις ένωση (\cup), τομή (\cap) και συμπλήρωμα ($'$) μπορούν να οριστούν στο $\mathcal{F}(\Omega)$ ως εξής

$$\begin{aligned}(A \cup B)(x) &= \max\{A(x), B(x)\} \\ (A \cap B)(x) &= \min\{A(x), B(x)\} \\ A'(x) &= 1 - A(x)\end{aligned}\tag{2.5}$$

Σημειώστε ότι ο τελεστής \max (δηλ. maximum – μέγιστο) χρησιμοποιείται για πεπερασμένο πλήθος στοιχείων, ενώ σε διαφορετική περίπτωση, χρησιμοποιείται ο τελεστής \sup (δηλ. supremum – ελάχιστο άνω φράγμα) συμβολικά \vee . Αντίστοιχα ισχύουν και για τον τελεστή \min (δηλ. minimum – ελάχιστο), ο οποίος για μη-πεπερασμένο πλήθος στοιχείων αντικαθίσταται με τον τελεστή \inf (δηλ. infimum – μέγιστο κάτω φράγμα) ή συμβολικά \wedge . Συνεπώς, οι τελεστές \vee και \wedge είναι γενικότεροι των τελεστών \max και \min , αντίστοιχα, και οι προαναφερθέντες ορισμοί για την ένωση (\cup) και την τομή (\cap) μπορούν να γραφτούν ως $(A \cup B)(x) = A(x) \vee B(x)$ και $(A \cap B)(x) = A(x) \wedge B(x)$, αντίστοιχα.

Στα μαθηματικά αποδείχτηκε ότι η δομή $(\mathcal{F}(\Omega), \subseteq)$ είναι ένα **πλήρες πλέγμα** (Για τον μαθηματικό ορισμό του πλήρους πλέγματος βλέπε στο [κεφάλαιο 7](#)). Σημειώστε ότι ο όρος «πλέγμα» προτείνεται εδώ, στα πλαίσια της Υπολογιστικής Νοημοσύνης, αντί του όρου «δικτυωτό» που έχει προταθεί στα μαθηματικά [1] ως η μετάφραση στα ελληνικά του αγγλικού όρου “lattice”. Επισημαίνουμε ότι ο όρος πλέγμα (lattice) μπορεί να έχει και μια άλλη, διαφορετική έννοια, δηλ. αυτή του ορθογώνιου πλέγματος, η οποία δεν θα μας απασχολήσει στο παρόν βιβλίο.

Στη βιβλιογραφία διατυπώνεται ένα πλήθος άλλων χαρακτηριστικών και ιδιοτήτων ασαφών συνόλων με μαθηματικό κυρίως ενδιαφέρον. Πιο πάνω εστίασαμε σε ορισμένα χαρακτηριστικά και ιδιότητες που ενδιαφέρουν σε πρακτικές εφαρμογές.

2.2 Επεκτάσεις Ασαφών Συνόλων

Το επόμενο αποτέλεσμα έχει σημαντικές προεκτάσεις τόσο θεωρητικές όσο και πρακτικές.

2.2.1 Αναπαράσταση ενός Ασαφούς Συνόλου

Ένα μαθηματικό αποτέλεσμα της θεωρίας ασαφών συνόλων είναι το **θεώρημα της ταυτοποίησης**, το οποίο λέει ότι ένα ασαφές σύνολο μπορεί να αναπαρασταθεί, ισοδύναμα, είτε με την συνάρτηση συμμετοχής του είτε με τις α -διατομές του [21]. Ένα πλεονέκτημα των α -διατομών είναι η δυνατότητα παράλληλης επεξεργασίας επίπεδο-προς-επίπεδο.

Έτσι, υπάρχουν δύο ισοδύναμοι τρόποι αναπαράστασης ενός ασαφούς συνόλου, που είναι είτε με την χαρακτηριστική συνάρτησή του είτε με το σύνολο των α -διατομών του. Η ισοδυναμία των προαναφερθέντων δύο αναπαραστάσεων χρησιμοποιείται συχνά για να μετατρέπονται σχέσεις και πράξεις μεταξύ ασαφών συνόλων σε σχέσεις και πράξεις μεταξύ των α -διατομών ασαφών συνόλων.

2.2.2 Η Αρχή της Επέκτασης

Η **Αρχή της Επέκτασης** είναι μια μέθοδος που χρησιμοποιείται για την ασαφοποίηση συναρτήσεων όπως εξηγείται στη συνέχεια. Συγκεκριμένα, έστω δύο (κλασικά) σύνολα αναφοράς X και Y , και μια συνάρτηση $f: X \rightarrow Y$. Δοθέντος ενός ασαφούς συνόλου A στο σύνολο αναφοράς X , η Αρχή της Επέκτασης ορίζει το ασαφές σύνολο B στο σύνολο αναφοράς Y στο οποίο απεικονίζεται το A μέσω της συνάρτησης f ως:

$$B(y) = f(A(x)) = \sup_{x \in X | y=f(x)} \{A(x)\} \quad (2.6)$$

Η Αρχή της Επέκτασης μπορεί να εφαρμοστεί με υπολογισμούς α -διατομών ως εξής:

$$[f(A)]_\alpha = f(A_\alpha) \quad (2.7)$$

Σημειώστε ότι η εφαρμογή της Αρχής της Επέκτασης δεν οδηγεί αναγκαστικά σε καλύτερα αποτελέσματα. Συγκεκριμένα, είναι δυνατόν να επινοηθεί ένα εξειδικευμένο ασαφές μοντέλο το οποίο να δίνει καλύτερα αποτελέσματα από το ασαφές μοντέλο που προκύπτει από την εφαρμογή της Αρχής της Επέκτασης.

2.2.3 Ασαφής Σχέση

Μια **ασαφής σχέση** R μεταξύ δύο (κλασικών) συνόλων X και Y είναι ένα ασαφές σύνολο ως προς το σύνολο αναφοράς $X \times Y$ και ορίζεται ως $R: X \times Y \rightarrow [0,1]$. Γενικότερα, μια ασαφής σχέση ορίζεται στο Καρτεσιανό γινόμενο N (κλασικών) συνόλων. Για παράδειγμα, έστω τα (κλασικά) σύνολα M και Θ πόλεων της Μακεδονίας και Θεσσαλίας που ορίζονται ως $M = \{\Sigma\rho\rho\rho\rho\rho, \text{Καβ}\alpha\lambda\alpha\}$ και $\Theta = \{\text{Καρδίτσα}, \text{Βόλος}\}$. Μια ασαφής σχέση $R = \text{“ομοιότητα”}$ μεταξύ των M και Θ θα μπορούσε να οριστεί ως $R(x,y) = \frac{0.8}{(\Sigma\rho\rho, \text{Καρ})} + \frac{0.2}{(\Sigma\rho\rho, \text{Βολ})} + \frac{0.1}{(\text{Καβ}, \text{Καρ})} +$

$\frac{0.6}{(\text{Καβ}, \text{Βολ})}$. Επισημαίνουμε ότι ο προαναφερθείς συμβολισμός κλάσματος δεν έχει την

κλασική έννοια του κλάσματος, π.χ. $0.2/(\Sigma\rho\rho, \text{Βολ})$ απλά σημαίνει ότι η ομοιότητα των Σερρών και του Βόλου ορίζεται (από τον χρήστη) να είναι 0.2. Η προαναφερθείσα ασαφής

σχέση R μπορεί να παρασταθεί υπό μορφή διδιάστατου πίνακα ως $R = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.1 & 0.6 \end{bmatrix}$.

2.2.4 Προβολή

Μια χρήσιμη πράξη είναι η *προβολή* μιας ασαφούς σχέσης. Συγκεκριμένα, έστω μια ασαφής σχέση $A(x_1, \dots, x_N)$ ως προς σύνολο αναφοράς το Καρτεσιανό γινόμενο $X = X_1 \times \dots \times X_N$ και έστω $H = X_{i_1} \times \dots \times X_{i_m}$ με $\{i_1, \dots, i_m\} = I' \subseteq I = \{1, \dots, N\}$ ένας υποχώρος του X . Ονομάζουμε **προβολή** του $A(x_1, \dots, x_N)$ στον υποχώρο $H = X_{i_1} \times \dots \times X_{i_m}$ το ασαφές σύνολο που ορίζεται ως

$$Proj_H A(x_1, \dots, x_N) = P(x_{i_1}, \dots, x_{i_m}) = \max_{i \notin \{i_1, \dots, i_m\}} \{A(x_1, \dots, x_N)\} \quad (2.8)$$

Για μη-πεπερασμένο πλήθος αριθμητικών τιμών $A(x_1, \dots, x_N)$, ο τελεστής \max αντικαθίσταται με τον τελεστή \sup ή, ισοδύναμα, \vee . Για παράδειγμα, έστω μια ασαφής σχέση $R'(x,y)$, όπου $x \in X = \mathfrak{R}$, $y \in Y = \mathfrak{R}$, και \mathfrak{R} είναι το σύνολο των πραγματικών αριθμών. Η προβολή της $R'(x,y)$ στο Y είναι το ασαφές σύνολο $B'(y) = Proj_Y R'(x,y) = \vee_x R'(x,y)$.

2.2.5 Γενικεύσεις Ασαφών Συνόλων

Στα προηγούμενα, η χαρακτηριστική συνάρτηση $A: \Omega \rightarrow [0,1]$ ενός ασαφούς συνόλου A ως προς το σύνολο αναφοράς Ω απεικόνιζε ένα συγκεκριμένο στοιχείο $x \in \Omega$ σε έναν αριθμό στο διάστημα $[0,1]$. Τέτοια ασαφή σύνολα ονομάζονται **τύπου-1**. Ωστόσο, πολλοί ερευνητές

θεώρησαν ότι τα ασαφή σύνολα τύπου-1 περιορίζουν την ασάφεια. Για τον λόγο αυτό προτάθηκε η χαρακτηριστική συνάρτηση να λαμβάνει τιμές στο σύνολο των κλειστών διαστημάτων του $[0,1]$. Με άλλα λόγια, ένα στοιχείο $x \in \Omega$ να απεικονίζεται σε ένα διάστημα του $[0,1]$. Έτσι προέκυψε το **διαστημώτιμο ασαφές σύνολο**.

Ένα διαστημώτιμο ασαφές σύνολο A μπορεί να γενικευτεί περαιτέρω, θεωρώντας ότι η χαρακτηριστική του συνάρτηση λαμβάνει τιμές στο ασαφές δυναμοσύνολο $[0,1]^{[0,1]}$. Με άλλα λόγια, ένα στοιχείο $x \in \Omega$ απεικονίζεται σε ένα ασαφές σύνολο ως προς το σύνολο αναφοράς $[0,1]$, συμβολικά $A: \Omega \rightarrow \mathcal{A}([0,1])$, όπου η δομή $(\mathcal{A}([0,1]), \subseteq)$ είναι ένα πλήρες πλέγμα όπως προαναφέρθηκε. Το προκύπτον ασαφές σύνολο ονομάζεται (**γενικευμένο ασαφές σύνολο τύπου-2**). Σημειώστε ότι ένα διαστημώτιμο ασαφές σύνολο είναι ειδική περίπτωση (γενικευμένου) ασαφούς συνόλου τύπου-2.

Όλα τα προαναφερθέντα ασαφή σύνολα μπορούν να θεωρηθούν ως ειδικές περιπτώσεις της γενικότερης περίπτωσης ασαφούς συνόλου $A: \Omega \rightarrow L$, όπου η δομή (L, Ξ) είναι πλήρες πλέγμα. Π.χ. για $L = [0,1]$ προκύπτουν τα ασαφή σύνολα τύπου-1, για $L = \mathcal{A}([0,1])$ προκύπτουν τα ασαφή σύνολα τύπου-2, κλπ.

Ένας αριθμός εναλλακτικών ασαφών συνόλων, συνήθως μόνο με μαθηματικό ενδιαφέρον, έχουν οριστεί και συνεχίζονται να παρουσιάζονται στην βιβλιογραφία για αναπαράσταση της ασάφειας, αμφιβολίας, ανακρίβειας, κλπ. Για παράδειγμα, αναφέρουμε το **διαισθητικό ασαφές σύνολο** [2], έστω A , το οποίο χαρακτηρίζεται, πρώτον, από μία συνάρτηση συμμετοχής $A: \Omega \rightarrow [0,1]$ και, δεύτερον, μία **συνάρτηση μη-συμμετοχής** $A': \Omega \rightarrow [0,1]$ στο σύνολο αναφοράς Ω έτσι ώστε $0 \leq A(x) + A'(x) \leq 1$.

2.3 Ασαφής Λογική

Η *Ασαφής Λογική* ξεκινάει με την παραδοχή ότι μια πρόταση μπορεί να μην είναι ούτε (απόλυτα) αληθής ούτε (απόλυτα) ψευδής, αλλά να χαρακτηρίζεται από κάποιο βαθμό αλήθειας/ψεύδους. Με άλλα λόγια, μπορεί η αλήθεια μιας πρότασης να μην είναι **δίτιμη** στο διμελές σύνολο $\{0,1\}$, αλλά να είναι **πλειότιμη** στο απειροσύνολο (κλειστό) διάστημα $[0,1]$. Στη συνέχεια παρουσιάζουμε συγκεκριμένα παραδείγματα.

Παράδειγμα Β

Παράδειγμα δίτιμης πρότασης είναι «Η Ελένη πέρασε το μάθημα της Υπολογιστικής Νοημοσύνης» διότι, εφόσον εξετάστηκε, η Ελένη είτε το πέρασε το μάθημα είτε όχι, και οτιδήποτε άλλο αποκλείεται. Άλλο παράδειγμα δίτιμης πρότασης είναι «Ο Πέτρος έχει ελληνικό διαβατήριο» διότι ο Πέτρος είτε έχει ελληνικό διαβατήριο είτε όχι, και αποκλείεται να συμβαίνει οτιδήποτε άλλο. Τέλος, σημειώστε την διαδεδομένη πεποίθηση ότι οι μαθηματικές προτάσεις είναι δίτιμες, δηλ. είναι είτε αληθείς είτε ψευδείς. Έτσι, για παράδειγμα, στη Γεωμετρία μπορεί να αναζητηθεί η δίτιμη τιμή αλήθειας της πρότασης «Τα ύψη ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο».

Παράδειγμα Γ

Κάποιες προτάσεις από τη φύση τους δεν είναι δίτιμες αλλά είναι πλειότιμες. Για παράδειγμα, η πρόταση «Το φύλλωμα του δένδρου είναι καταπράσινο» είναι αληθής στο βαθμό που το φύλλωμα του δένδρου είναι καταπράσινο. Έτσι, η προαναφερθείσα πρόταση μπορεί να είναι απόλυτα αληθής στις αρχές της άνοιξης, να είναι απόλυτα ψευδής στα τέλη του φθινοπώρου όταν όλα τα φύλλα του δένδρου έχουν κιτρινίσει, και να είναι ως κάποιο βαθμό αληθής σε κάποια ενδιάμεση χρονική στιγμή όταν τα φύλλα είναι εν μέρει κίτρινα/πράσινα.

Τυπικά, όπως συμβαίνει σ' αυτό το κεφάλαιο, μια πλειότιμη πρόταση λαμβάνει τιμές στο απειροσύνολο (κλειστό) διάστημα $[0,1]$. Ωστόσο, έχουν προταθεί επεκτάσεις, μαθηματικού κυρίως ενδιαφέροντος, όπου μια πλειότιμη πρόταση λαμβάνει τιμές σε ένα (πλήρες) πλέγμα. Σημειώστε ότι, στις περισσότερες των περιπτώσεων, μια προτεινόμενη (πλειότιμη) λογική επέκταση είναι τέτοια ώστε η γνωστή δίτιμη (προτασιακή) λογική να ισχύει ως ειδική περίπτωση. Στη συνέχεια, μελετούμε μια μοντελοποίηση της ομιλούμενης γλώσσας στα πλαίσια της δίτιμης (προτασιακής) λογικής.

2.3.1 Μια Δίτιμη Μοντελοποίηση της Ομιλούμενης Γλώσσας

Μια δίτιμη πρόταση P μπορεί να είναι **σύνθετη** αποτελούμενη από τη διάζευξη ή/και τη σύζευξη ή/και την άρνηση κλπ περισσότερων από μια δίτιμων προτάσεων P_1, \dots, P_n . Για παράδειγμα, μπορεί μια πρόταση έστω P να είναι η σύζευξη « P_1 ΚΑΙ ... ΚΑΙ P_n ». Οπότε, η σύνθετη πρόταση P είναι αληθής εάν και μόνο εάν όλες οι προτάσεις P_1, \dots, P_n είναι αληθείς. Προτάσεις εμπλέκονται σε γλωσσικές δομές, οι οποίες ονομάζονται **κανόνες**, της μορφής

R: EAN «πρόταση-αίτιο» ΤΟΤΕ «πρόταση-αποτέλεσμα»

ή συμβολικά

R: $P \rightarrow Q$

όπου P είναι η «πρόταση-αίτιο» και Q είναι η «πρόταση-αποτέλεσμα». Συνηθίζεται η πρόταση P να ονομάζεται το **αίτιο** και η πρόταση Q το **αποτέλεσμα** του κανόνα R: $P \rightarrow Q$.

Ένας κανόνας R: $P \rightarrow Q$ αποτελεί (και αυτός) μια πρόταση η τιμή αληθείας της οποίας είναι συνάρτηση των τιμών αληθείας p και q των προτάσεων P (αίτιο) και Q (αποτέλεσμα), αντίστοιχα. Η πρώτη στήλη του Πίνακα 2.1 δείχνει την τιμή αλήθειας του κανόνα R: $P \rightarrow Q$ για την δίτιμη (Boolean) **συνάρτηση συνεπαγωγής** $p \rightarrow q$. Επιπλέον, ο Πίνακας 2.1 δείχνει την συνάρτηση $p \vee q$ και τη σχέση $p \leq q$ που έχουν τον ίδιο πίνακα αλήθειας με την συνάρτηση συνεπαγωγής $p \rightarrow q$. Συγκεκριμένα, η συνάρτηση $p \vee q$ είναι μια δίτιμη συνάρτηση των δίτιμων μεταβλητών p και q, ενώ η σχέση $p \leq q$ είναι είτε αληθής (τιμή 1) είτε ψευδής (τιμή 0) ανάλογα με τις τιμές που λαμβάνουν οι δίτιμες μεταβλητές p και q.

Πίνακας 2.1 Πίνακας αληθείας της δίτιμης συνάρτησης συνεπαγωγής $p \rightarrow q$, όπου p και q είναι οι δίτιμες τιμές αλήθειας των προτάσεων P (αίτιο) και Q (αποτέλεσμα) ενός κανόνα $P \rightarrow Q$. Η συνάρτηση $p \vee q$ και η σχέση $p \leq q$ έχουν τον ίδιο πίνακα αλήθειας με την συνεπαγωγή $p \rightarrow q$.

p	q	$p \rightarrow q$	$p \vee q$	$p \leq q$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	1	1	1	1

Ας μελετήσουμε τον ακόλουθο κανόνα

R: EAN «ο άνθρωπος A πέφτει στο νερό» ΤΟΤΕ «ο άνθρωπος A βρέχεται»,

όπου η πρόταση P είναι «ο άνθρωπος A πέφτει στο νερό» ενώ η πρόταση Q είναι «ο άνθρωπος A βρέχεται». Σημειώστε ότι, όχι μόνον η κάθε πρόταση P και Q ξεχωριστά έχει νόημα, αλλά και ο κανόνας R: $P \rightarrow Q$ έχει νόημα και, τέλος, οι τιμές της συνάρτησης συνεπαγωγής $p \rightarrow q$ του Πίνακα 2.1 μπορούν να επαληθευτούν με την κοινή λογική.

Ωστόσο, τα πράγματα είναι διαφορετικά όταν P είναι, έστω, η πρόταση «υπάρχει ένα βιβλίο επάνω στο τραπέζι» ενώ Q είναι η πρόταση «βρέχει στο Τόκυο». Προφανώς, κάθε μια από τις προτάσεις P και Q , ξεχωριστά, έχει νόημα και μπορεί να είναι είτε αληθής είτε ψευδής, ωστόσο ο κανόνας $R: P \rightarrow Q$ δεν έχει νόημα στα πλαίσια της κοινής λογικής. Συνεπώς, ένας κανόνας $R: P \rightarrow Q$ αναπαριστάνει περισσότερη πληροφορία από αυτήν που αναπαριστούν κάθε μία από τις προτάσεις P και Q ξεχωριστά. Συγκεκριμένα, η επιπλέον πληροφορία στον κανόνα $R: P \rightarrow Q$ έγκειται στη συσχέτιση δύο προτάσεων P και Q με τη σχέση αίτιου-αποτελέσματος ή, με συνολοθεωρητικούς όρους, μπορούμε να πούμε ότι η επιπλέον πληροφορία έγκειται στη θεώρηση του διατεταγμένου ζεύγους (P, Q) ως γεγονός.

Στα προηγούμενα, ένας κανόνας $R: P \rightarrow Q$ μπορεί να θεωρηθεί ως ένα «(μηχανικό) σύστημα» με μία είσοδο (την πρόταση P) και μία έξοδο (την πρόταση Q). Παρακάτω θα θεωρήσουμε επεκτάσεις τέτοιων συστημάτων με περισσότερες εισόδους και εξόδους.

Ένα σύνολο κανόνων ονομάζεται **αλγόριθμος** ή, εναλλακτικά, **σύστημα** ή, εναλλακτικά, **μοντέλο** και αποτελεί το υψηλότερο επίπεδο της ομιλούμενης γλώσσας που μοντελοποιείται εδώ στα πλαίσια της προτασιακής λογικής. Στη συνέχεια μελετούμε πως η προαναφερθείσα μοντελοποίηση της ομιλούμενης γλώσσας επεκτείνεται στο πλαίσιο της ασαφούς λογικής.

2.3.2 Επεκτάσεις στην Ασαφή Λογική

Έχουμε ήδη εξηγήσει παραπάνω πως η αλήθεια μιας πρότασης μπορεί να είναι πλειότιμη στο διάστημα $[0, 1]$. Μια ασαφής επέκταση της δίτιμης προτασιακής λογικής τυπικά βασίζεται σε μια αξιωματική επέκταση των λογικών πράξεων της *σύζευξης*, της *διάζευξης* και της *άρνησης* για τη δημιουργία σύνθετων (ασαφών) προτάσεων. Συγκεκριμένα, έχουν προταθεί τελεστές $T: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ με το όνομα **τριγωνική νόρμα**, ή **τ-νόρμα** για συντομία, ως επεκτάσεις της λογικής σύζευξης, τελεστές $S: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ με το όνομα **τριγωνική συννόρμα**, ή **τ-συννόρμα** ή **σ-νόρμα** για συντομία, ως επεκτάσεις της λογικής διάζευξης, καθώς και, αντιστοίχως, τελεστές $N: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ για την άρνηση [10], [16].

Συνήθως, μια τριγωνική νόρμα τυπικά ζητείται να έχει τις ακόλουθες ιδιότητες

N1. $T(x, y) = T(y, x)$ – Αντιμεταθετική.

N2. $T(x, T(y, z)) = T(T(x, y), z)$ – Προσεταιριστική.

N3. $y \leq z \Rightarrow T(x, y) \leq T(x, z)$ – Μονοτονική.

N4. $T(x, 1) = x$ – Ουδέτερο Στοιχείο 1.

Μια τριγωνική κονόρμα τυπικά ζητείται να έχει τις ακόλουθες ιδιότητες

K1. $S(x,y) = S(y,x)$ – Αντιμεταθετική.

K2. $S(x,S(y,z)) = S(S(x,y),z)$ – Προσεταιριστική.

K3. $y \leq z \Rightarrow S(x,y) \leq S(x,z)$ – Μονοτονική.

K4. $S(x,0) = x$ – Ουδέτερο Στοιχείο 0.

Ενώ, ένας τελεστής για την άρνηση τυπικά ζητείται να έχει την ακόλουθη ιδιότητα

A1. $x \leq y \Rightarrow N(x) \geq N(y)$.

Παραδείγματα τριγωνικής νόρμας

$T_M(x,y) = \min\{x,y\}$ – Ελάχιστη τ-νόρμα ή, εναλλακτικά, τ-νόρμα Gödel.

$T_P(x,y) = x \cdot y$ – τ-νόρμα γινομένου.

$T_L(x,y) = \max\{x+y-1,0\}$ – τ-νόρμα Lukasiewicz.

Παραδείγματα τριγωνικής κονόρμας

$S_M(x,y) = \max\{x,y\}$ – Μέγιστη τ-συννόρμα ή, εναλλακτικά, τ-συννόρμα Gödel.

$S_P(x,y) = x+y-x \cdot y$ – τ-νόρμα γινομένου ή, εναλλακτικά, πιθανοτικό άθροισμα.

$S_L(x,y) = \min\{x+y,1\}$ – τ-συννόρμα Lukasiewicz ή, εναλλακτικά, φραγμένου αθροίσματος.

Παράδειγμα άρνησης

$N(x) = 1-x$.

Μια πλειότιμη (ασαφής) πρόταση A μπορεί να είναι **σύνθετη** αποτελούμενη από τη διάζευξη ή/και τη σύζευξη ή/και την άρνηση απλών, πλειότιμων προτάσεων A_1, \dots, A_n . Ο βαθμός αλήθειας της σύνθετης πρότασης A υπολογίζεται από τους βαθμούς αλήθειας των A_1, \dots, A_n , έτσι ώστε μια σύζευξη υπολογίζεται με μια τ-νόρμα, μια διάζευξη υπολογίζεται με σ-νόρμα, και μια άρνηση με έναν τελεστή άρνησης. Για παράδειγμα, εάν η πρόταση A έχει τη μορφή της σύζευξης « A_1 ΚΑΙ ... ΚΑΙ A_n » τότε ο βαθμός αλήθειας a της πρότασης A μπορεί να υπολογίζεται είτε ως το ελάχιστο $a = \min\{a_1, \dots, a_n\}$ είτε ως το γινόμενο $a = a_1 \cdot \dots \cdot a_n$, κλπ, όπου a_1, \dots, a_n είναι οι βαθμοί αλήθειας των ασαφών προτάσεων A_1, \dots, A_n , αντίστοιχα.

Περαιτέρω, ο βαθμός αλήθειας μιας ασαφούς συνεπαγωγής $I: [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ ορίζεται ως μια συνάρτηση $I(a,b)$ με δύο ορίσματα a και b έτσι ώστε για $a,b \in \{0,1\}$ η συνάρτηση $I(a,b)$ να επαληθεύει τον Πίνακα 2.1. Στα μαθηματικά έχουν προταθεί οι ακόλουθες οικογένειες συναρτήσεων ασαφών συνεπαγωγών [5]

$$I_S(a,b) = S(n(a),b) \text{ – Συνεπαγωγές-}S,$$

$$I_R(a,b) = \sup\{x \in [0,1] \mid T(a,x) \leq b\} \text{ – Συνεπαγωγές-}R,$$

$$I_{QL}(a,b) = S(n(a), T(a,b)) \text{ – Συνεπαγωγές-}QL,$$

όπου η συνάρτηση $T(.,.)$ είναι τ-νόρμα, η συνάρτηση $S(.,.)$ είναι σ-νόρμα, και η συνάρτηση $n(.)$ είναι άρνηση.

Σε πρακτικές εφαρμογές συχνά χρησιμοποιούνται οι ακόλουθες συναρτήσεις ασαφών συνεπαγωγών

$$I_B(a,b) = (1-a) \vee b \text{ – κατά Boole.}$$

$$I_L(a,b) = 1 \wedge (1-a+b) \text{ – κατά Lukasiewicz.}$$

$$I_Z(a,b) = (a \wedge b) \vee (1-a) \text{ – κατά Zadeh.}$$

$$I_M(a,b) = a \wedge b \text{ – κατά Mamdani.}$$

Είναι ενδιαφέρον ότι μόνον οι τρεις πρώτες συνεπαγωγές (δηλ. οι κατά Boole, Lukasiewicz και Zadeh) επαληθεύουν τον Πίνακα 2.1 της δίτιμης συνάρτησης συνεπαγωγής. Εντούτοις, η συνεπαγωγή κατά Mamdani είναι η δημοφιλέστερη λόγω της αποτελεσματικότητάς της καθώς και λόγω της ταχύτητας υλοποίησής της αφού επιλέγει τον μικρότερο μεταξύ δύο αριθμών. Το τελευταίο δείχνει ότι στην πράξη προτιμώνται αποτελεσματικότερες τεχνικές από άλλες οι οποίες μπορεί να ικανοποιούν κάποιες θεωρητικές αρχές.

Έστω μια σύνθετη (ασαφής) πρόταση A . Μια ασαφής συνεπαγωγή (κανόνας) $I: A \rightarrow B$ μπορεί να θεωρηθεί ως ένα «(μηχανικό) σύστημα» με πολλές εισόδους (που συνθέτουν την πρόταση A) και με μία έξοδο (την πρόταση B). Περαιτέρω, μπορούμε να θεωρήσουμε πολλές εξόδους όταν η πρόταση B είναι σύνθετη. Ωστόσο, η πάγια πρακτική στη βιβλιογραφία είναι η χρήση κανόνων με πολλές εισόδους και με μία έξοδο ο καθένας. Περισσότερες εξοδοί προκύπτουν από την παράλληλη θεώρηση κανόνων με πολλές εισόδους και με μία έξοδο ο καθένας.

Ένα σύνολο κανόνων ονομάζεται **ασαφής αλγόριθμος** ή, εναλλακτικά, **ασαφές σύστημα** ή, εναλλακτικά, **ασαφές μοντέλο** και αποτελεί το υψηλότερο επίπεδο της ομιλούμενης γλώσσας που μοντελοποιείται εδώ στα πλαίσια της ασαφούς λογικής.

2.4 Έμφαση σε Κατηγορηματικές Προτάσεις και σε Ασαφείς Αριθμούς

Προηγουμένως σ' αυτό το κεφάλαιο μελετήσαμε γενικά ασαφή σύνολα και ασαφή λογική. Στη συνέχεια εστιάζουμε σε ένα συγκεκριμένο τύπο ασαφών συνόλων, συγκεκριμένα στους ασαφείς αριθμούς, καθώς και σε έναν συγκεκριμένο τύπο ασαφούς λογικής συνυφασμένο με κατηγορηματικές προτάσεις όπως εξηγείται στη συνέχεια.

2.4.1 Κατηγορηματικές Προτάσεις

Στην Γραμματική της ομιλούμενης γλώσσας μια πρόταση ονομάζεται **κατηγορηματική** όταν χρησιμοποιεί συγκεκριμένα ρήματα με συνηθέστερο εξ αυτών το ρήμα *είναι*. Παράδειγμα κατηγορηματικής πρότασης είναι η ακόλουθη: «Η θερμοκρασία είναι υψηλή». Το ουσιαστικό όνομα «θερμοκρασία» αποτελεί το **υποκείμενο** της πρότασης [13], ενώ η φράση «είναι υψηλή» αποτελεί το **κατηγόρημα** όπου το επίθετο «υψηλή» αποτελεί το **κατηγορούμενο** (του υποκειμένου).

Κατηγορηματικές προτάσεις είναι ιδιαίτερα δημοφιλείς στην θεωρία και στις εφαρμογές Ασαφών Συστημάτων /Μοντέλων όπου το υποκείμενο μιας τέτοιας (κατηγορηματικής) πρότασης είναι ένα μετρήσιμο φυσικό μέγεθος, όπως «θερμοκρασία» παραπάνω, ενώ το κατηγορούμενο, βλ. «υψηλή» παραπάνω, αναπαριστάνεται με ένα ασαφές σύνολο που ορίζεται πάνω σε σύνολο αναφοράς πραγματικών αριθμών, δηλ. $\Omega \subseteq \mathfrak{R}$.

Το υποκείμενο μιας κατηγορηματικής πρότασης ονομάζεται **ασαφής μεταβλητή** [21]. Σύμφωνα με τα προηγούμενα, ως ασαφής μεταβλητή συνήθως επιλέγεται το όνομα ενός μετρήσιμου (φυσικού) μεγέθους όπως: Θερμοκρασία, Πίεση, Ταχύτητα, Βάρος, κλπ. Σημειώστε ότι, αντίθετα, ως ασαφής μεταβλητή δεν συνηθίζεται να επιλέγεται το όνομα μιας μη-μετρήσιμης οντότητας όπως: Σχολείο, Νόμος, Διαδικασία, Ερμηνεία, κλπ. Συγκεκριμένα, το κατηγορούμενο της (κατηγορηματικής) πρότασης τυπικά αποτελεί την έννοια η οποία αναπαριστάνεται με ένα ασαφές σύνολο.

Σε κάθε ασαφές σύνολο επικολλάται ως (λεκτική) **ετικέτα** το όνομα του κατηγορουμένου, βλ. «υψηλή» στο παραπάνω παράδειγμα. Επιπλέον, μια (λεκτική) ετικέτα μπορεί να συνοδεύεται από έναν **περίγραμμο** ή μία **υπεκφυγή**. Για παράδειγμα, η ετικέτα «υψηλή» μπορεί να συνοδεύεται από τον προσδιορισμό «πολύ» για να γίνει «πολύ υψηλή» ή από την υπεκφυγή «μάλλον όχι» για να γίνει «μάλλον όχι υψηλή». Σημειώστε ότι στην βιβλιογραφία έχουν προταθεί τεχνικές τροποποίησης της αρχικής συνάρτησης συμμετοχής του κατηγορουμένου μέσω προσδιορισμών /υπεκφυγών.

Το ρήμα «είναι» αποδίδει το κατηγορούμενο στο υποκείμενο. Έτσι, μια κατηγορηματική πρόταση « X είναι A » της ομιλούμενης γλώσσας μπορεί συμβολικά να αναπαρασταθεί με μια ισότητα η οποία αποδίδει την τιμή A (βλ. ασαφές σύνολο) στην ασαφή μεταβλητή X , συμβολικά $X = A$.

Μια πρόταση μπορεί να είναι *σύνθετη* αποτελούμενη από τη διάζευξη ή/και τη σύζευξη ή/και την άρνηση περισσότερων από μια κατηγορηματικών προτάσεων. Με τον τρόπο αυτό ένα σύνολο λογικά συσχετισμένων (κατηγορηματικών) προτάσεων μπορεί να αναπαρασταθεί με ένα σύνολο λογικά συσχετισμένων ασαφών συνόλων. Αυτή είναι μια μοντελοποίηση (απλών) προτάσεων της ομιλούμενης γλώσσας στα πλαίσια των ασαφών συνόλων και της ασαφούς λογικής.

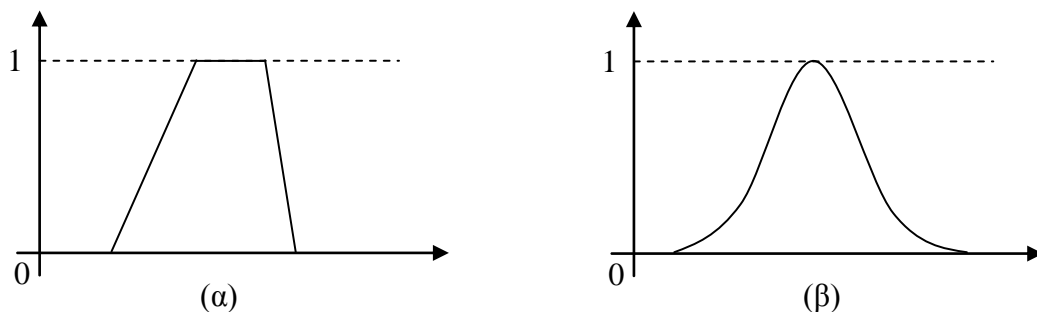
2.4.2 Ασαφείς Αριθμοί

Ένα φυσικό μέγεθος όπως Ύψος, Ταχύτητα, Χρόνος, Βάρος, Ηλεκτρικό Δυναμικό, Θερμοκρασία, κλπ μπορεί να μετρηθεί συγκρίνοντάς το με ένα άλλο ομοειδές μέγεθος το οποίο αποκαλούμε «μονάδα». Για παράδειγμα, όταν θέλουμε να μετρήσουμε ένα «μήκος» τότε θεωρούμε μια (ομοειδή) μονάδα μήκους, έστω ένα «μέτρο», και καταγράφουμε πόσες φορές το μέτρο χωράει στο προς μέτρηση μήκος. Το ακέραιο πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης του προς **μέτρηση** μήκους με την μονάδα ορίζουν έναν πραγματικό αριθμό. Είναι ενδιαφέρουσα η άποψη του φυσικού/μηχανικού Λόρδου Κέλβιν: «Όταν μπορείς να μετρήσεις αυτό για το οποίο μιλάς και να το εκφράσεις αριθμητικά τότε και μόνον τότε ξέρεις ουσιαστικά κάτι γι' αυτό». Αυτός, ισχυριζόμαστε, είναι ο λόγος που το σύνολο \mathfrak{R} των πραγματικών αριθμών κατέστη το πλέον δημοφιλές σύνολο αναφοράς Ω για τον ορισμό ασαφών συνόλων.

Ως αποτέλεσμα της μακροχρόνιας χρήσης των ασαφών συνόλων στην πράξη προτάθηκαν επιπλέον περιορισμοί στην χαρακτηριστική συνάρτηση ενός ασαφούς συνόλου. Συγκεκριμένα, μια πρώτη παραδοχή είναι ότι ένα ασαφές σύνολο είναι *κανονικό*, δηλ. έχει *ύψος* ίσο με 1. Μια δεύτερη, δημοφιλής παραδοχή είναι ότι η χαρακτηριστική συνάρτηση $A: \mathfrak{R} \rightarrow [0,1]$ έχει *κωδωνοειδή (κυρτή)* μορφή που ισοδυναμεί με το ότι μια α -διατομή, για $\alpha \in [0,1]$, είναι ένα (κλειστό) διάστημα. Μια επιπλέον παραδοχή μπορεί να είναι ότι η χαρακτηριστική συνάρτηση $A: \mathfrak{R} \rightarrow [0,1]$ είναι *συνεχής*.

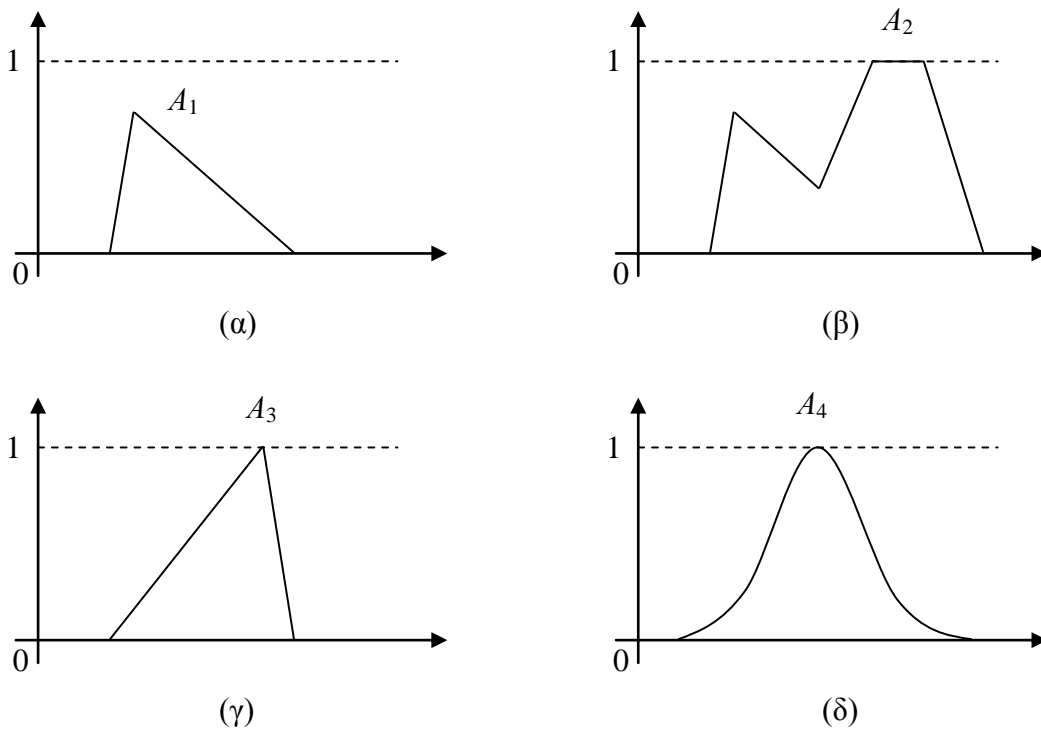
Ένα ασαφές σύνολο (τύπου-1) το οποίο ικανοποιεί τις προαναφερθείσες παραδοχές είναι γνωστό στη βιβλιογραφία ως **ασαφής αριθμός** ή, ισοδύναμα, ως **ασαφές διάστημα**. Σημειώστε ότι μια α -διατομή ενός ασαφούς αριθμού είναι ένα (κλειστό) διάστημα. Στην συντριπτική πλειοψηφία των πρακτικών εφαρμογών στη βιβλιογραφία χρησιμοποιούνται ασαφείς αριθμοί. Το σύνολο των ασαφών αριθμών εδώ συμβολίζεται με F_1 .

Στην βιβλιογραφία έχουν προταθεί διάφορες (παραμετρικές) οικογένειες χαρακτηριστικών συναρτήσεων για ασαφείς αριθμούς. Για παράδειγμα, έχουν προταθεί τριγωνικές, τραπεζοειδείς, κλπ χαρακτηριστικές συναρτήσεις. Κάποια τυπικά δείγματα μορφών χαρακτηριστικών συναρτήσεων δείχνονται στο Σχήμα 2.1. Σημειώστε ότι στην βιβλιογραφία έχουν προταθεί διάφορες «αριθμητικές ασαφών αριθμών» οι οποίες μπορούν να τελούνται μέσω των αντίστοιχων α -διατομών οι οποίες είναι (κλειστά) διαστήματα. Στο [κεφάλαιο 9](#) μελετούμε καινοτόμες τεχνικές χειρισμού ασαφών αριθμών οποιουδήποτε σχήματος [3].

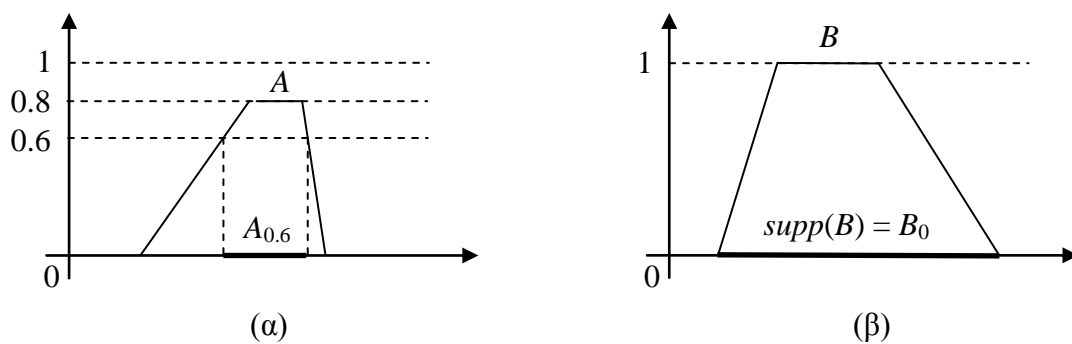


Σχήμα 2.1 Μια χαρακτηριστική συνάρτηση ασαφούς αριθμού μπορεί να έχει μορφή (α) Τραπεζοειδή (η Τριγωνική είναι μια ειδική περίπτωση). (β) Κωδωνοειδή.

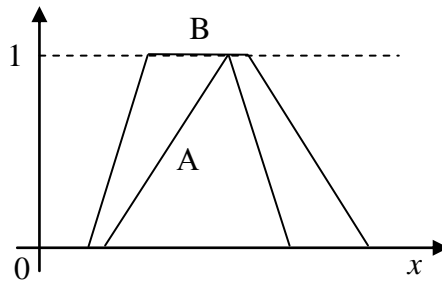
Στη συνέχεια, διάφορα χαρακτηριστικά ασαφών συνόλων επιδεικνύονται σε ασαφείς αριθμούς. Έτσι, το Σχήμα 2.2 απεικονίζει γραφικά τέσσερα ασαφή σύνολα $A_i: \mathfrak{R} \rightarrow [0,1]$, $i \in \{1,2,3,4\}$. Συγκεκριμένα, τα A_1 και A_2 δεν είναι ασαφείς αριθμοί, ενώ τα A_3 και A_4 είναι. Περαιτέρω, το Σχήμα 2.3 δείχνει (α) επάνω στην ευθεία των πραγματικών αριθμών, την α -διατομή $A_{0.6}$ ενός ασαφούς συνόλου A με ύψος $hgt(A) = 0.8$, και (β) το στήριγμα $supp(B) = B_0$ του ασαφούς αριθμού B . Το Σχήμα 2.4 δείχνει δύο ασαφείς αριθμούς A (με τριγωνική χαρακτηριστική συνάρτηση) και B (με τραπεζοειδή χαρακτηριστική συνάρτηση) έτσι ώστε $A \subseteq B$ ή, εναλλακτικά, $A(x) \leq B(x)$, $\forall x \in \mathfrak{R}$. Η ένωση (\cup), η τομή (\cap) και το συμπλήρωμα ($'$) ασαφών αριθμών δεν είναι αναγκαστικά ασαφής αριθμός όπως επιδεικνύεται στο Σχήμα 2.5.



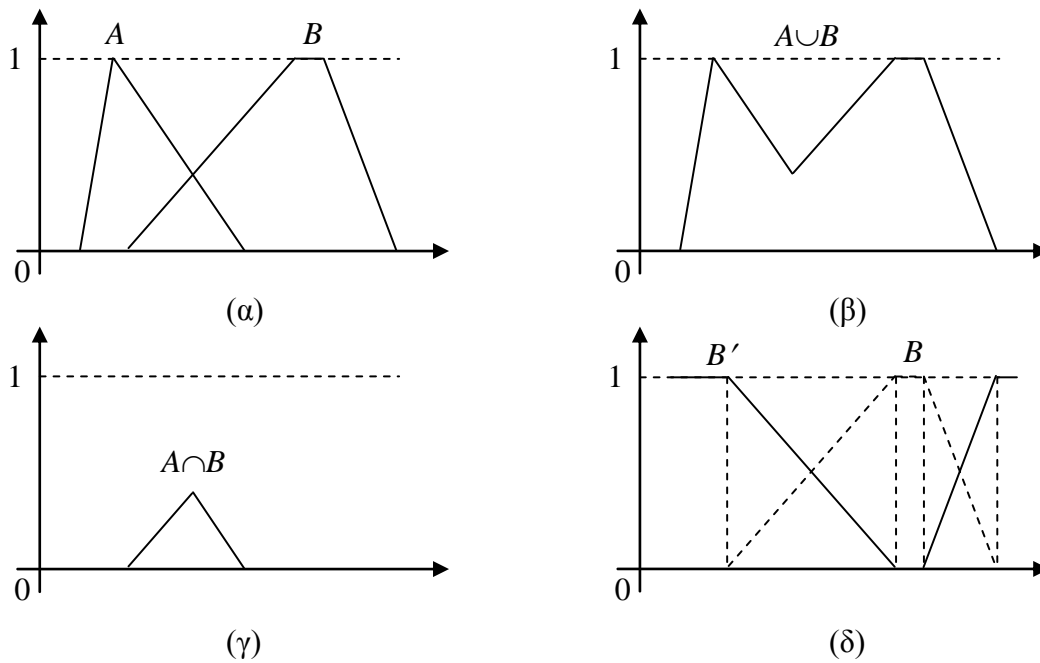
Σχήμα 2.2 (α) Κυρτό, μη-κανονικό ασαφές σύνολο A_1 . (β) Μη-κυρτό, κανονικό ασαφές σύνολο A_2 . (γ) Ασαφής αριθμός A_3 , και (δ) Ασαφής αριθμός A_4 (δηλ. κανονικό και κυρτό ασαφές σύνολο ως προς σύνολο αναφοράς το σύνολο \mathfrak{R} των πραγματικών αριθμών) με συνεχή χαρακτηριστική συνάρτηση.



Σχήμα 2.3 (α) Κυρτό, μη-κανονικό ασαφές σύνολο A με ύψος $hgt(A) = 0.8$. Η α -διατομή $A_{0.6}$ δείχνεται με έντονη γραμμή επάνω στην ευθεία \mathfrak{R} των πραγματικών αριθμών. (β) Ασαφής αριθμός B . Το στήριγμα $supp(B)$ είναι η α -διατομή B_0 .



Σχήμα 2.4 Δύο ασαφείς αριθμοί A (με τριγωνική χαρακτηριστική συνάρτηση) και B (με τραπεζοειδή χαρακτηριστική συνάρτηση) προς επίδειξη της σχέσης $A \subseteq B$ ή, ισοδύναμα, $A(x) \leq B(x), \forall x \in \mathfrak{R}$.



Σχήμα 2.5 (α) Δύο ασαφείς αριθμοί A και B . (β) Η ένωση $A \cup B$. (γ) Η τομή $A \cap B$. (δ) Το συμπλήρωμα B' (του ασαφούς αριθμού B) έχει μη-κυρτή χαρακτηριστική συνάρτηση που δείχνεται με συνεχή γραμμή.

2.4.3 Διακριτές Χαρακτηριστικές Συναρτήσεις

Εναλλακτικά, αντί για παραμετρική (συνεχή) χαρακτηριστική συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα (συνεχές) διάστημα, η χαρακτηριστική συνάρτηση ενός ασαφούς συνόλου μπορεί να ορίζεται σε αριθμήσιμο (βλ. διακριτό) και μάλιστα πεπερασμένο πεδίο ορισμού. Για παράδειγμα, θεωρήστε τα ασαφή σύνολα $A = \{(1,1), (2,0.9), (3,0.6), (4,0.2)\}$, $B = \{(3,0.1), (4,0.5), (5,0.7), (6,0.9), (7,1), (8,1), (9,1)\}$, και $\Gamma = \{(1,0.1), (2,0.3), (3,0.9), (4,1), (5,0.6), (6,0.2)\}$ ως προς το σύνολο αναφοράς $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Στη συνέχεια υπολογίζουμε τα αποτελέσματα πράξεων μεταξύ των προαναφερθέντων ασαφών συνόλων A , B και Γ .

$$A \cap B = \{(3,0.1), (4,0.2)\}.$$

$$B \cup \Gamma = \{(1,0.1), (2,0.3), (3,0.9), (4,1), (5,0.7), (6,0.9), (7,1), (8,1), (9,1)\}.$$

$$(A \cup B) \cap \Gamma = \{(1,0.1), (2,0.3), (3,0.6), (4,0.5), (5,0.6), (6,0.2)\}.$$

$$B' = \{(1,1), (2,1), (3,0.9), (4,0.5), (5,0.3), (6,0.1)\}.$$

Πλεονεκτήματα της διακριτής αναπαράστασης μιας χαρακτηριστικής συνάρτησης περιλαμβάνουν ευκολία ψηφιακής υλοποίησης καθώς και υπολογιστική ταχύτητα.

2.4.4 Υπολογισμός Ασαφούς Συμπεράσματος

Στη συνέχεια μελετάμε πως μπορούμε να υπολογίσουμε το συμπέρασμα ενός ασαφούς κανόνα. Η κλασική μέθοδος εξαγωγής συμπερασμάτων στη Λογική είναι η **Modus Ponens** (στα λατινικά σημαίνει **Τρόπος του Θέτειν**) που περιγράφεται στη συνέχεια.

Έστω ο κανόνας: ΕΑΝ «το X είναι A » ΤΟΤΕ «το Y είναι B ».

Έστω το γεγονός: «το X είναι A ».

Άρα, το συμπέρασμα είναι: «το Y είναι B ».

Για παράδειγμα, θεωρήστε την ακόλουθη εφαρμογή από την Γεωμετρία.

Κανόνας: ΕΑΝ «ένα τρίγωνο είναι ισόπλευρο» ΤΟΤΕ «το τρίγωνο είναι ισογώνιο».

Έστω το γεγονός: «το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισόπλευρο».

Άρα, το συμπέρασμα, σύμφωνα με τη μέθοδο Modus Ponens, είναι ότι η κάθε γωνία του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι ίση με 60° . Συνεπώς, δεν χρειάζεται να μετρήσουμε τις γωνίες του ισόπλευρου τριγώνου $AB\Gamma$. Εφόσον μετρήσαμε τις πλευρές του και βρήκαμε ότι είναι ίσες, η μέθοδος εξαγωγής συμπεράσματος Modus Ponens μας οδηγεί στο ασφαλές συμπέρασμα ότι η κάθε γωνία του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι ίση με 60° .

Η μέθοδος εξαγωγής συμπερασμάτων Modus Ponens χρησιμοποιήθηκε εκτεταμένα σε κλασικά **Έμπειρα Συστήματα**. Ωστόσο, η μέθοδος Modus Ponens κατά την εφαρμογή της στην πράξη εμφάνισε ένα βασικό πρόβλημα όπως περιγράφεται στο ακόλουθο παράδειγμα.

Έστω ο κανόνας: EΑΝ «η θερμοκρασία ενός ανθρώπου είναι ίση ή μεγαλύτερη από 40 °C» ΤΟΤΕ «χορήγησε αντιπυρετικό σύμφωνα με τις οδηγίες».

Έστω το γεγονός: «Ο Παύλος έχει θερμοκρασία 39.9 °C εδώ και ώρες».

Με βάση την μέθοδο Modus Ponens δεν βγαίνει το συμπέρασμα να χορηγηθεί αντιπυρετικό στον Παύλο, ενώ η κοινή λογική μας λέει πως θα έπρεπε να χορηγηθεί μια καλή δόση αντιπυρετικού στον Παύλο διότι το 39.9 °C είναι πολύ κοντά στο 40 °C.

Περιπτώσεις όπως αυτή του παραπάνω παραδείγματος, οδήγησαν σε μια γενίκευση της μεθόδου Modus Ponens όπως σκιαγραφείται στη συνέχεια.

Έστω ο κανόνας: EΑΝ «το X είναι A » ΤΟΤΕ «το Y είναι B ».

Έστω το γεγονός: «το X είναι A' », όπου το A' «μοιάζει», υπό κάποια έννοια, με το A .

Άρα, το συμπέρασμα είναι: «το Y είναι B' », όπου το ασαφές σύνολο B' (θέλουμε να «μοιάζει», υπό την προαναφερθείσα έννοια, με το B).

Συγκεκριμένα, έστω ο κανόνας «R: EΑΝ (X είναι $A(x)$) ΤΟΤΕ (Y είναι $B(y)$)», συμβολικά «R: ($X = A(x)$)→($Y = B(y)$)» ή, απλούστερα, «R: $A(x)$ → $B(y)$ », όπου τα $A(x)$ και $B(y)$ είναι ασαφή σύνολα σε κατηγορηματικές προτάσεις όπως αναπτύχθηκε παραπάνω. Σ' αυτήν την περίπτωση η γενικευμένη μέθοδος Modus Ponens λαμβάνει την εξής μορφή:

Κανόνας: R: ($X = A(x)$)→($Y = B(y)$).

Γεγονός: $X = A'(x)$

Το ζητούμενο είναι ο υπολογισμός ενός συμπεράσματος $B'(y)$ που να αντιστοιχεί στο γεγονός $A'(x)$ σύμφωνα με την εμπειρία, η οποία αναπαριστάται με τον κανόνα R.

Ένας τρόπος υπολογισμού του B' είναι με τον **συνθετικό συμπερασματικό κανόνα** Zadeh:

$$B' = A' \circ R,$$

όπου R είναι μια συνάρτηση ασαφούς συνεπαγωγής για τον κανόνα R: ($X=A(x)$)→($Y=B(y)$), ενώ “ο” είναι ο τελεστής του ελάχιστου άνω φράγματος μιας t-νόρμας, δηλαδή

$$B'(y_0) = \bigvee_{(x,y_0)} \bigwedge_{\forall(x,y)} (A'(x), R(x, y)) \quad (2.9)$$

Συγκεκριμένα, για t-νόρμα ίση με min προκύπτει ο ακόλουθος υπολογισμός του B'

$$B'(y_0) = \bigvee_{(x,y_0)} [A'(x) \wedge_{\forall(x,y)} R(x, y)]. \quad (2.10)$$

Εναλλακτικές t-νόρμες μπορούν να χρησιμοποιηθούν. Ακόμη, στην πράξη χρησιμοποιούνται εναλλακτικές συναρτήσεις ασαφούς συνεπαγωγής που περιλαμβάνουν τις ακόλουθες

- 1) Κατά Boole: $R(x,y) = (1-A(x))\vee B(y)$
- 2) Κατά Lukasiewicz: $R(x,y) = 1 \wedge (1-A(x)+B(y))$
- 3) Κατά Zadeh: $R(x,y) = (A(x)\wedge B(y))\vee (1-A(x))$
- 4) Κατά Mamdani: $R(x,y) = A(x)\wedge B(y)$

Σημειώστε ότι μια συνάρτηση ασαφούς συνεπαγωγής R ορίζεται άμεσα στο Καρτεσιανό γινόμενο $[0,1]\times[0,1]$, και έμμεσα στο Καρτεσιανό γινόμενο βασικών συνόλων $X\times Y$ όπως φαίνεται στην έκφραση $R(A(x),B(y))$. Παρατηρείστε ότι η ασαφής συνεπαγωγή $R(x,y)$ ενός ασαφούς κανόνα $R: A(x)\rightarrow B(y)$ αποτελεί μια ασαφής σχέση. Σημειώστε ακόμη ότι ο υπολογισμός του $B'(y_0)$ σύμφωνα με τον συνθετικό συμπερασματικό κανόνα του Zadeh αντιστοιχεί στην προβολή της ασαφούς σχέσης $R'(x,y) = \bigvee_{(x,y)} (A'(x), R(x,y))$ στο y .

Παράδειγμα Δ

Παρουσιάζουμε ένα παράδειγμα εφαρμογής του συνθετικού συμπερασματικού κανόνα του Zadeh για τον υπολογισμό της εξόδου B' ενός κανόνα « $R: A\rightarrow B$ » με μια είσοδο (A) και μια έξοδο (B) που ορίζονται σε πεπερασμένο πλήθος τιμών του πεδίου ορισμού τους. Θα χρησιμοποιήσουμε την τ-νόρμα $T_M(x,y) = \min(x,y)$ και την συνεπαγωγή κατά Mamdani $R(x,y) = A(x)\wedge B(y)$, δηλ. θα χρησιμοποιήσουμε την Εξ.(2.10). Έστω, $A = \{(1,0), (2,0.1), (3,0.4), (4,0.6), (5,0.9), (6,1)\}$ και $B = \{(0,1), (10,1), (20,0.7), (30,0.3), (40,0)\}$. Η ασαφής συνεπαγωγή R υπολογίζεται όπως φαίνεται στον Πίνακα 2.2.

Έστω ότι παρουσιάζεται η είσοδος $A' = \{(1,0), (2,0.2), (3,0.7), (4,1), (5,1), (6,0.7)\}$ στον κανόνα $R: A\rightarrow B$. Για ευκολία του αναγνώστη η είσοδος $A'(x)$ δείχνεται στην τελευταία στήλη του Πίνακα 2.2. Η ασαφής σχέση $R'(x,y) = A'(x) \wedge R(x,y)$ παρουσιάζεται στον

Πίνακα 2.3. Τέλος, η προβολή της ασαφούς σχέσης $R'(x,y)$ στο σύνολο $Y = \{0, 10, 20, 30, 40\}$ αποτελεί την ζητούμενη έξοδο $B'(y_0) = \bigvee_{(x,y_0)} R'(x,y)$ ως $B' = \{(0,0.9), (10,0.9), (20,0.7),$

$(30,0.3), (40,0)\}$, $y_0 \in Y$. Παρατηρείστε ότι, δοθείσης της «ομοιότητας» (υπό την έννοια της Ευκλείδειας απόστασης) του A' με το A , η προηγούμενη τεχνική υπολόγισε ένα B' που παρόμοια «μοιάζει» με το B .

Πίνακας 2.2

Ασαφής συνεπαγωγή $A(x) \rightarrow B(y)$ κατά Mamdani $A(x) \wedge B(y)$.Στην τελευταία στήλη δείχνεται το ασαφές σύνολο $A'(x)$.

$A(x) \backslash B(y)$		0	10	20	30	40	$A'(x)$
		1	1	0.7	0.3	0	
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0	0.2
3	0.4	0.4	0.4	0.4	0.3	0	0.7
4	0.6	0.6	0.6	0.6	0.3	0	1
5	0.9	0.9	0.9	0.7	0.3	0	1
6	1	1	1	0.7	0.3	0	0.7

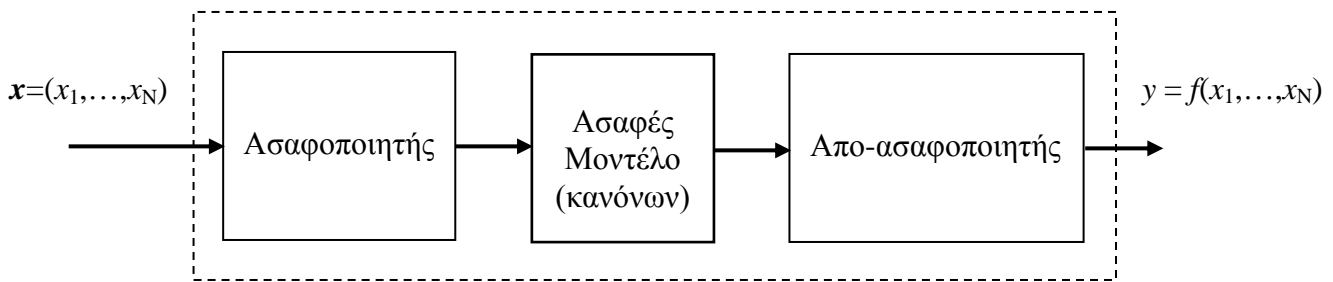
Πίνακας 2.3

Ασαφής σχέση $R'(x,y)$ στον συνθετικό συμπερασματικό κανόνα $\vee_{(x,y_0)} R'(x,y)$ του Zadeh.

0	0	0	0	0
0.1	0.1	0.1	0.1	0
0.4	0.4	0.4	0.3	0
0.6	0.6	0.6	0.3	0
0.9	0.9	0.7	0.3	0
0.7	0.7	0.7	0.3	0

2.5 Ασαφή Μοντέλα τύπου Mamdani, και Sugeno

Στην πλειοψηφία των πρακτικών εφαρμογών ένα Ασαφές Μοντέλο βρίσκεται στην «καρδιά» μηχανισμού που υλοποιεί μια συνάρτηση $f: \mathcal{R}^N \rightarrow \mathcal{T}$ [8] όπως δείχνεται στο Σχήμα 2.6, όπου το σύνολο \mathcal{T} μπορεί να είναι είτε ο Ευκλείδειος χώρος \mathcal{R}^M , οπότε το ασαφές μοντέλο λειτουργεί ως παλινδρομητής, είτε κάποιο (πεπερασμένο) σύνολο L , οπότε το ασαφές μοντέλο λειτουργεί ως ταξινομητής που διαμερίζει το πεδίο ορισμού \mathcal{R}^N της συνάρτησης f σε κατηγορίες. Αν και, άλλα μοντέλα όπως τεχνητά νευρωνικά δίκτυα κλπ, μπορούν να υλοποιήσουν μια συνάρτηση $f: \mathcal{R}^N \rightarrow \mathcal{T}$, εντούτοις ένα μοναδικό χαρακτηριστικό των Ασαφών Μοντέλων είναι ότι αξιοποιούν την ανθρώπινη εμπειρία χρησιμοποιώντας όρους της **ομιλούμενης γλώσσας** προς υλοποίηση της συνάρτησης $f: \mathcal{R}^N \rightarrow \mathcal{T}$.



Σχήμα 2.6 Το Ασαφές Μοντέλο (κανόνων) βρίσκεται στην «καρδιά» ενός μηχανισμού υλοποίησης μιας συνάρτησης $f: \mathcal{R}^N \rightarrow \mathcal{T}$. Ο Ασαφοποιητής μετατρέπει τους εισερχόμενους αριθμούς x_1, \dots, x_N σε ασαφή σύνολα. Ο Απο-ασαφοποιητής μετατρέπει τις απαντήσεις των κανόνων του Ασαφούς Μοντέλου σε ένα στοιχείο του πεδίου τιμών \mathcal{T} της συνάρτησης $f: \mathcal{R}^N \rightarrow \mathcal{T}$.

Δύο δημοφιλή Ασαφή Μοντέλα είναι τα **Ασαφή Συστήματα Συμπερασμού** τύπου Mamdani και τύπου Sugeno [4] που μελετώνται στη συνέχεια.

2.5.1 Ασαφές Μοντέλο τύπου Mamdani

Ένας ασαφής κανόνας τύπου Mamdani [12] δείχνεται στη συνέχεια.

R_M : EAN (το υποκείμενο X είναι A) TOTE (το υποκείμενο Y είναι B).

ή συμβολικά

R_M : EAN $X = A$ TOTE $Y = B$, ή

R_M : $(X = A) \rightarrow (Y = B)$, ή

R_M : $A \rightarrow B$.

Στον κανόνα R_M , η πρόταση «το υποκείμενο X είναι A » αποτελεί το αίτιο, ενώ η πρόταση «το υποκείμενο Y είναι B » αποτελεί το αποτέλεσμα. Ή, ισοδύναμα, η ισότητα « $X = A$ » αποτελεί το αίτιο, ενώ η ισότητα « $Y = B$ » αποτελεί το αποτέλεσμα του κανόνα R_M .

Οι κανόνες ενός μοντέλου Mamdani απεικονίζουν ασαφείς αριθμούς σε ασαφείς αριθμούς. Ένα σύνολο κανόνων τύπου Mamdani « R_i : EAN $X = A_i$ TOTE $Y = B_i$ », $i \in \{1, \dots, I\}$ μπορεί να ερμηνευτεί ως ένα σύνολο ζευγών (A_i, B_i) , $i \in \{1, \dots, I\}$ δειγμάτων μιας συνάρτησης $f: \mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{F}_1$, η οποία απεικονίζει ασαφείς αριθμούς σε ασαφείς αριθμούς. Τυπικά, ένα μοντέλο Mamdani χρησιμοποιείται σε εφαρμογές όπου υπάρχει διαθέσιμη γνώση εμπειρογνομώνων.

2.5.2 Ασαφές Μοντέλο τύπου Sugeno

Ένας ασαφής κανόνας τύπου Sugeno [18], [19] δείχνεται στη συνέχεια.

R_S : EAN (το υποκείμενο X είναι A) TOTE (η συνάρτηση y ισούται με $f(x)$).

ή συμβολικά

R_S : EAN $X = A$ TOTE $y = f(x)$, ή

R_S : $(X = A) \rightarrow (y = f(x))$, ή

R_S : $A \rightarrow y = f(x)$,

όπου $\mathbf{x}=(x_1, \dots, x_N)$ όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.6.

Στον κανόνα R_S , η πρόταση «το υποκείμενο X είναι A » αποτελεί το αίτιο, ενώ η πρόταση «η συνάρτηση y ισούται με $f(x)$ » αποτελεί το αποτέλεσμα. Η, ισοδύναμα, η ισότητα « $X = A$ » αποτελεί το αίτιο, ενώ η ισότητα « $y = f(x)$ » αποτελεί το αποτέλεσμα του κανόνα R_S .

Ένα μοντέλο κανόνων τύπου Sugeno « R_i : EAN $X = A_i$ TOTE $y = f_i(X)$ », $i \in \{1, \dots, I\}$ απεικονίζει ασαφείς αριθμούς σε πραγματικές συναρτήσεις. Η συνάρτηση $f_i(X)$ στο αίτιο συνήθως είναι γραμμική. Τυπικά, ένα μοντέλο Sugeno χρησιμοποιείται σε εφαρμογές όπου υπάρχουν διαθέσιμες πολλές αριθμητικές μετρήσεις.

Δεδομένου ενός αιτίου, ένα ασαφές σύστημα τύπου Mamdani/Sugeno χρησιμοποιεί ανθρώπινη γνώση που αναπαριστάνεται με κανόνες καθώς και ασαφή λογική προκειμένου να υπολογίσει ένα συμπέρασμα. Θα εξηγήσουμε πως πραγματοποιείται αυτό, πρώτα, για ένα σύστημα Mamdani και, στη συνέχεια, για ένα σύστημα Sugeno.

2.5.3 Παράδειγμα Mamdani

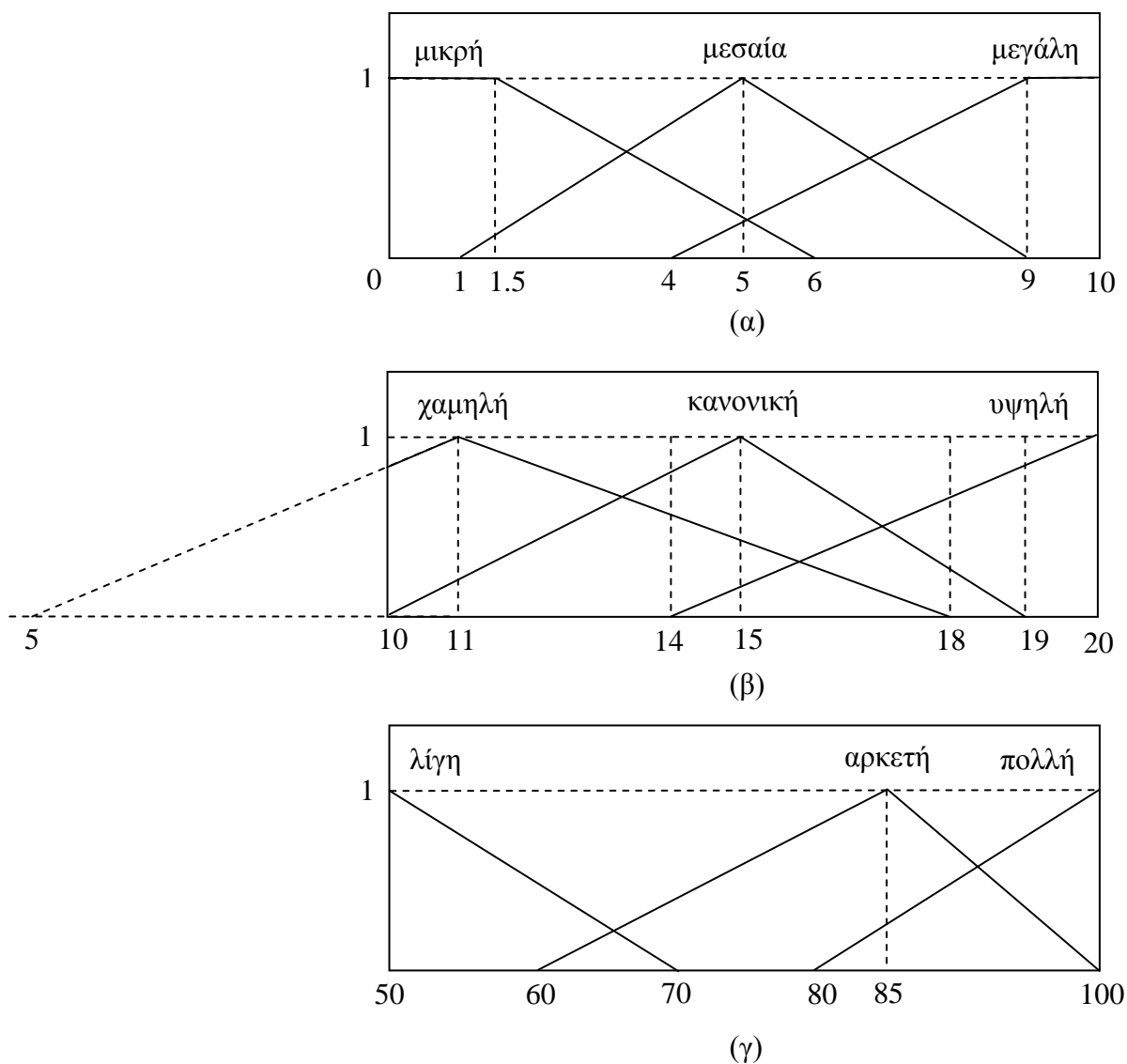
Ένα σύστημα Mamdani τυπικά περιλαμβάνει ένα σύνολο κανόνων κατηγορηματικών προτάσεων της μορφής «EAN (X είναι A) TOTE (Y είναι B)», ή συμβολικά « $A(x) \rightarrow B(y)$ », όπου τα $A(x)$ και $B(y)$ είναι ασαφείς αριθμοί $A: \mathfrak{R} \rightarrow [0,1]$ και $B: \mathfrak{R} \rightarrow [0,1]$. Σημειώστε ότι τα ορίσματα x και y των ασαφών αριθμών $A(x)$ και $B(y)$, αντίστοιχα, τυπικά αναφέρονται σε διαφορετικά σύνολα αναφοράς και αντιστοιχούν σε διαφορετικές ασαφείς μεταβλητές. Επίσης, η πρόταση-αίτιο (X είναι A) μπορεί να είναι σύνθετη αποτελούμενη από την σύζευξη ή/και τη διάζευξη ή/και την άρνηση απλών κατηγορηματικών προτάσεων. Συγκεκριμένα, έστω το ακόλουθο σύστημα Mamdani τριών κανόνων με δύο εισόδους τις (είσοδος1, είσοδος2) και μια έξοδο την (έξοδος1).

K1: EAN (η είσοδος₁ είναι μικρή) ΚΑΙ (η είσοδος₂ είναι κανονική) ΤΟΤΕ (η έξοδος₁ είναι λίγη)
 K2: EAN (η είσοδος₁ είναι μεγάλη) ΚΑΙ (η είσοδος₂ είναι χαμηλή) ΤΟΤΕ (η έξοδος₁ είναι αρκετή)
 K3: EAN (η είσοδος₁ είναι μεσαία) ΚΑΙ (η είσοδος₂ είναι υψηλή) ΤΟΤΕ (η έξοδος₁ είναι πολλή)

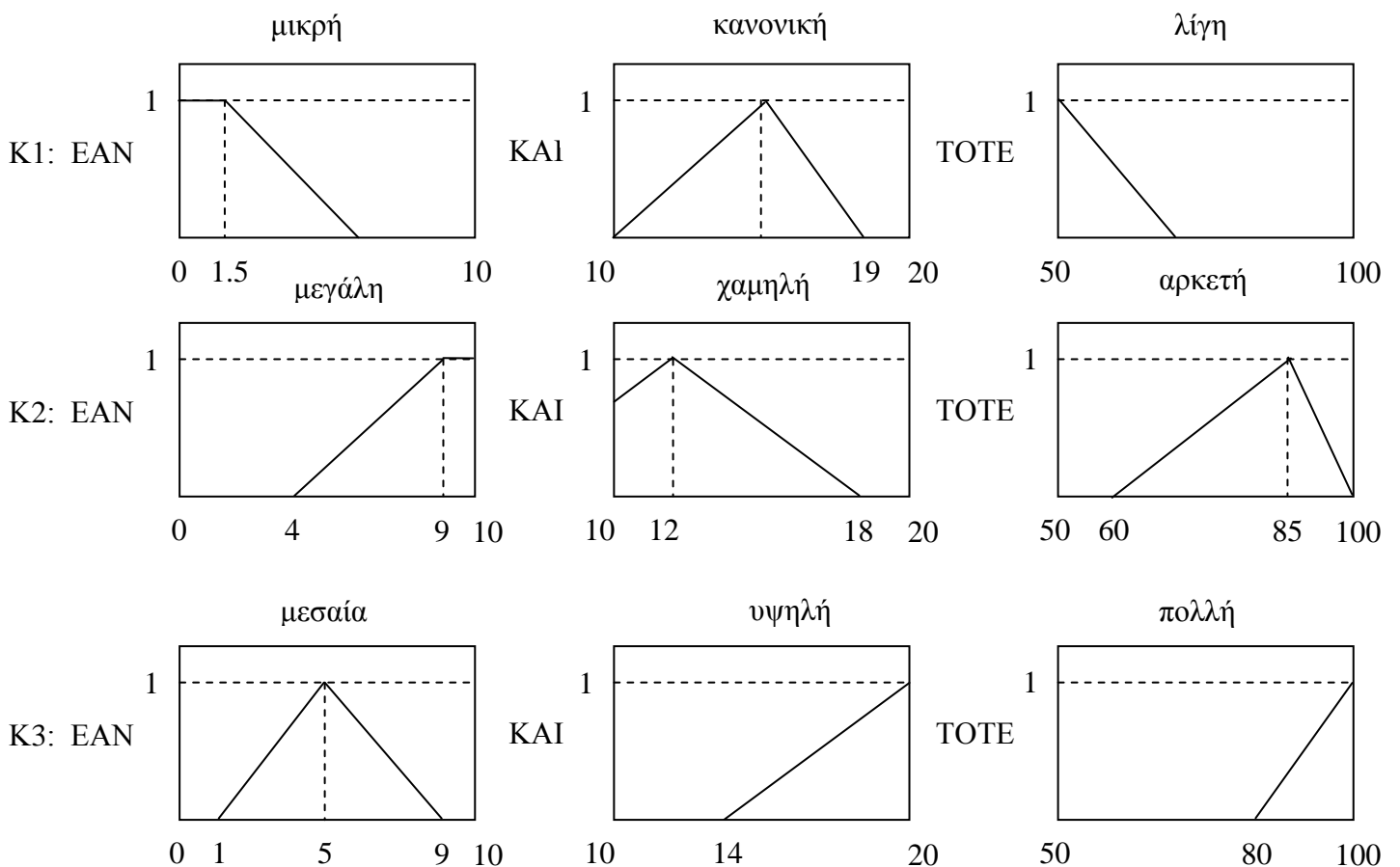
Σύμφωνα με τα παραπάνω, η καθεμιά από τις «είσοδος₁», «είσοδος₂» και «έξοδος₁» είναι ασαφής μεταβλητή. Έστω ότι το βασικό σύνολο για την «είσοδος₁» είναι το κλειστό διάστημα $[0,10]$, για την «είσοδος₂» είναι το $[10,20]$, ενώ για την «έξοδος₁» είναι το κλειστό διάστημα $[50,100]$. Μια συνηθισμένη πρακτική είναι να προκαθορίζονται τα ασαφή σύνολα /αριθμοί που επιτρέπεται να λάβει ως τιμές μια ασαφής μεταβλητή. Για παράδειγμα, έστω ότι η ασαφής μεταβλητή «είσοδος₁» μπορεί να λάβει ως τιμές τους ασαφείς αριθμούς με ετικέτες «μικρή», «μεσαία» και «μεγάλη» που φαίνονται στο Σχήμα 2.7(α). Οι τιμές για τις ασαφείς μεταβλητές «είσοδος₂» και «έξοδος₁» φαίνονται στο Σχήμα 2.7 (β) και (γ), αντίστοιχα. Σημειωτέον ότι το ακριβές σχήμα και θέση των ασαφών αριθμών που μπορεί να λάβει ως τιμές μια ασαφής μεταβλητή είναι αντικείμενο έρευνας. Σημειώστε επίσης ότι μια συνηθισμένη πρακτική είναι η πλήρης κάλυψη ολόκληρου του βασικού συνόλου από την (συνολοθεωρητική) ένωση των στηριγμάτων όλων των ασαφών τιμών που μπορεί να λάβει μια ασαφής μεταβλητή διότι θέλουμε κάθε πραγματικός αριθμός του βασικού συνόλου να ανήκει οπωσδήποτε τουλάχιστον σε ένα ασαφές σύνολο του βασικού συνόλου. Μια άλλη συνηθισμένη πρακτική είναι η (μερική) **επικάλυψη** των ασαφών τιμών που μπορεί να λάβει μια ασαφής μεταβλητή διότι η προαναφερθείσα (μερική) επικάλυψη αποφεύγει τις απότομες αλλαγές στην συνάρτηση $f: \mathfrak{R}^N \rightarrow \mathfrak{T}$ (βλ. Σχήμα 2.6) όπως απαιτείται σε πολλές εφαρμογές.

Το Σχήμα 2.8 απεικονίζει τους τρεις κανόνες K1, K2 και K3 χρησιμοποιώντας τα ασαφή σύνολα του Σχήματος 2.7. Οι τρεις κανόνες K1, K2 και K3 αποτελούν το Ασαφές Μοντέλο (κανόνων) του Σχήματος 2.6. Το Σχήμα 2.9 εμφανίζει δύο αριθμητικές εισόδους $x_1=6$ και $x_2=15$ (βλ. Σχήμα 2.6 για $N=2$). Ο βαθμός συμμετοχής του αριθμού $x_1=6$ ή $x_2=15$ σε καθένα από τα ασαφή σύνολα του αντίστοιχου βασικού συνόλου ενεργοποιεί μέρος του ασαφούς συνόλου όπως δείχνεται με παχιές γραμμές στο Σχήμα 2.10. Αυτή η διαδικασία ονομάζεται **ασαφοποίηση** (των αριθμητικών εισόδων x_1 και x_2) και μετατρέπει έναν αριθμό όπως τον $x_1=6$ ή τον $x_2=15$ σε ένα ασαφές σύνολο με σκοπό να αξιοποιηθεί η υπάρχουσα βάση γνώσης ασαφών κανόνων. Συγκεκριμένα, στο Σχήμα 2.10, αναφορικά με τον κανόνα K3, ο αριθμός $x_1=6$ ανήκει στον ασαφή αριθμό «μεσαία» με βαθμό συμμετοχής 0.75, ενώ ο αριθμός $x_2=15$

ανήκει στον ασαφή αριθμό «υψηλή» με βαθμό συμμετοχής 0.167. Γι' αυτόν τον λόγο οι ασαφείς αριθμοί «μεσαία» και «υψηλή» ενεργοποιούνται μέχρι ύψους 0.75 και 0.167, αντίστοιχα, και προκύπτουν τα ασαφή σύνολα που δείχνονται με παχιές γραμμές στο Σχήμα 2.10. Παρόμοια, στο Σχήμα 2.10, αναφορικά με τον κανόνα K2, οι ασαφείς αριθμοί «μεγάλη» και «χαμηλή» ενεργοποιούνται μέχρι ύψους 0.4 και 0.5, αντίστοιχα, και προκύπτουν τα ασαφή σύνολα που δείχνονται με παχιές γραμμές. Για τον κανόνα K1, οι ασαφείς αριθμοί «μικρή» και «κανονική» ενεργοποιούνται μέχρι ύψους 0 και 1, αντίστοιχα.



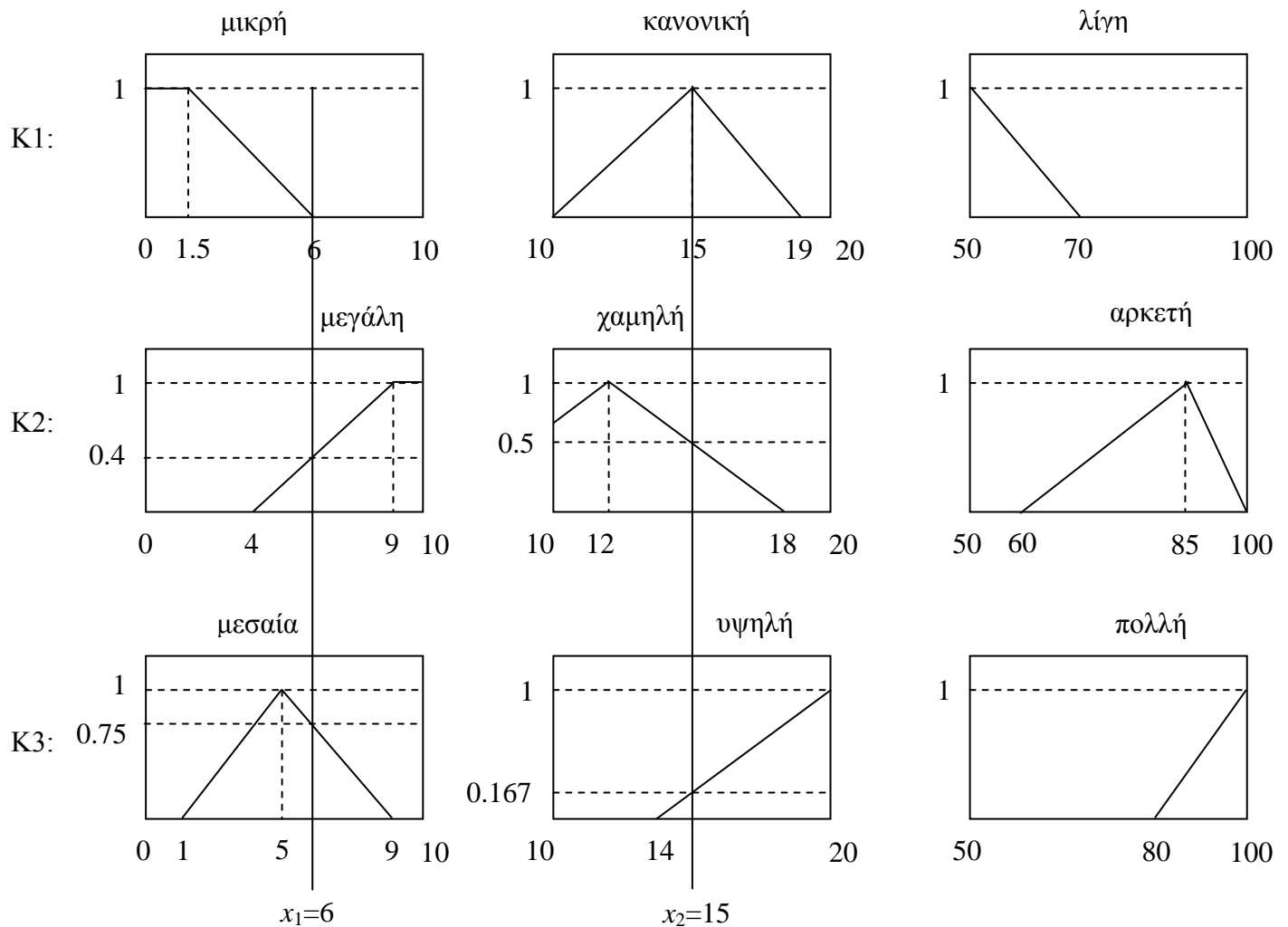
Σχήμα 2.7 Εδώ απεικονίζονται όλες οι δυνατές τιμές (βλ. ασαφείς αριθμοί) που μπορούν να λάβουν οι ασαφείς μεταβλητές (α) «είσοδος1», (β) «είσοδος2» και (γ) «έξοδος1», στο αντίστοιχο βασικό σύνολο.



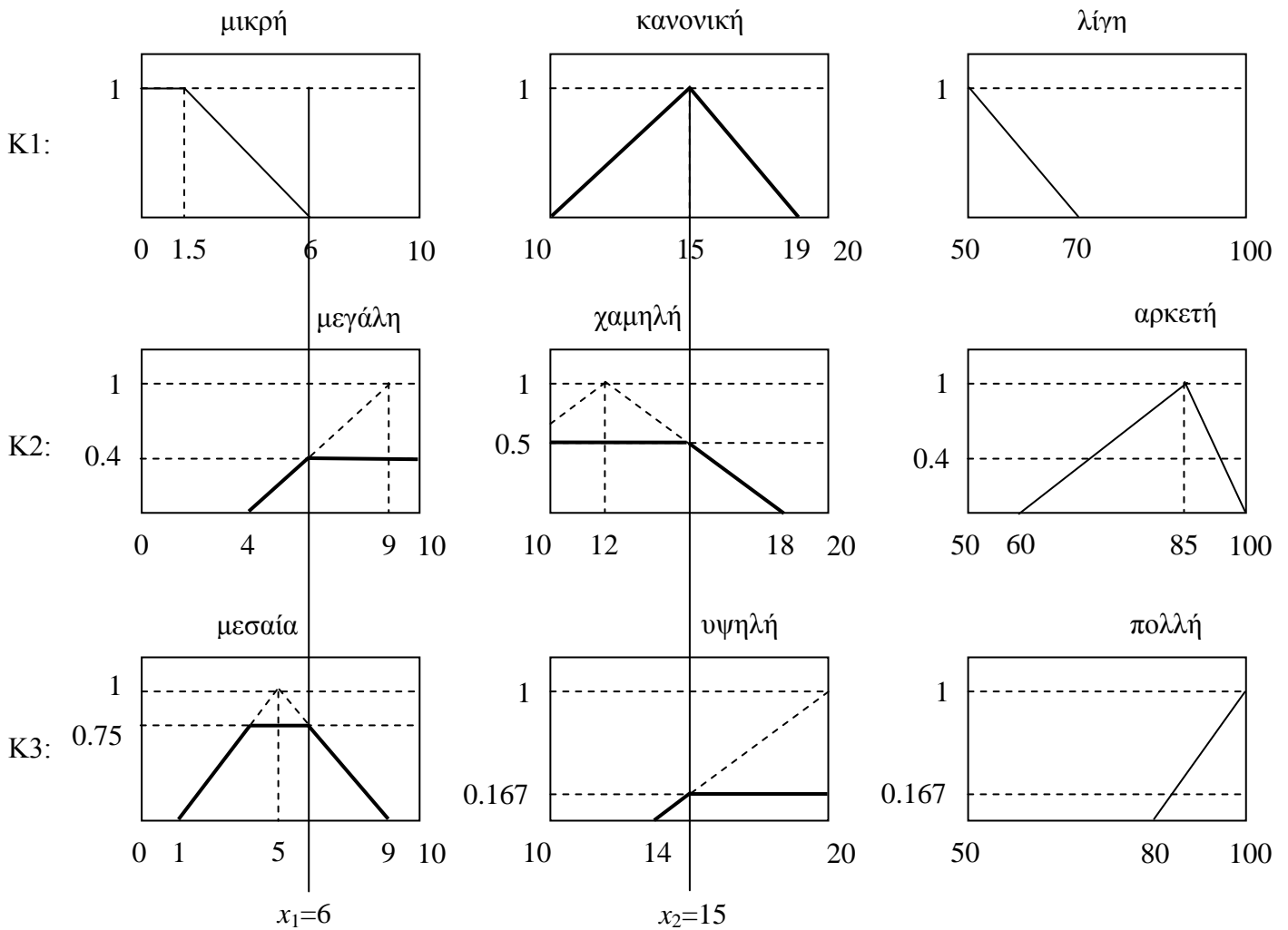
Σχήμα 2.8 Γραφική αναπαράσταση των τριών κανόνων K1, K2 και K3 που αναφέρονται στο κείμενο δοθέντων των ασαφών συνόλων του Σχήματος 2.7.

Έστω ότι οι κατηγορηματικές προτάσεις στο αίτιο οποιουδήποτε από τους κανόνες K1, K2, K3 είναι σε σύζευξη. Συνεπώς, ο βαθμός αλήθειας του αιτίου ενός κανόνα υπολογίζεται με μια t-νόρμα, έστω την $T_M(x,y) = \min\{x,y\}$. Συνεπώς, για τις δύο αριθμητικές εισόδους $x_1=6$ και $x_2=15$, ο **βαθμός ενεργοποίησης** του αιτίου του κανόνα K1 είναι $K1(0,1)=\min\{0,1\}=0$, ο βαθμός ενεργοποίησης του αιτίου του κανόνα K2 είναι $K2(0.4,0.5)=\min\{0.4,0.5\}=0.4$ και του αιτίου του κανόνα K3 είναι $K3(0.75,0.167)=\min\{0.75,0.167\}=0.167$. Ο προαναφερθείς βαθμός ενεργοποίησης του αιτίου του κάθε κανόνα χρησιμοποιείται για να υπολογιστεί το ασαφές σύνολο στην έξοδο του κάθε κανόνα που δείχνεται στο Σχήμα 2.11 με παχιές γραμμές – Προφανώς ο κανόνας K1 δεν παράγει καμιά έξοδο. Η ασαφής έξοδος του κάθε κανόνα αποτελεί το μερικό αποτέλεσμα του συγκεκριμένου κανόνα το οποίο πρέπει να

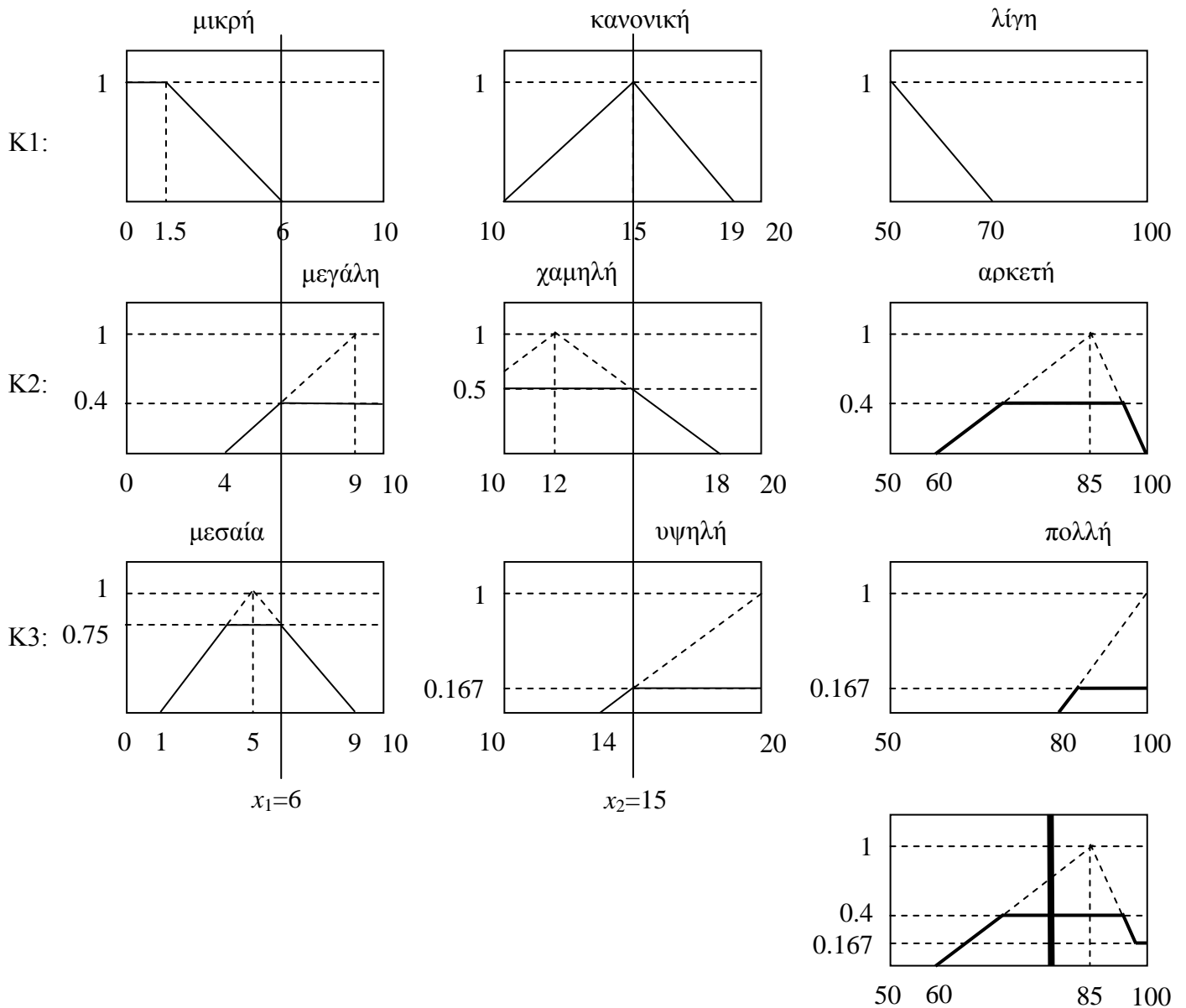
συναθροιστεί, κατά κάποιο τρόπο, με τα μερικά αποτελέσματα όλων των κανόνων της βάσης ώστε να παραχθεί το ολικό αποτέλεσμα του Ασαφούς Μοντέλου Mamdani που δείχνεται μόνο του στο Σχήμα 2.11 κάτω από τους τρεις κανόνες K1, K2 και K3. Συγκεκριμένα, το ολικό αποτέλεσμα του Ασαφούς Μοντέλου στο Σχήμα 2.11 προκύπτει από την (συνολοθεωρητική) ένωση του μερικού αποτελέσματος κάθε κανόνα ακριβώς από πάνω του.



Σχήμα 2.9 Οι αριθμητικές είσοδοι $x_1=6$ και $x_2=15$ στο Ασαφές Μοντέλο των τριών κανόνων K1, K2 και K3 του Σχήματος 2.8 έχουν βαθμό συμμετοχής (σε ασαφή σύνολα) που δείχνεται στον αντίστοιχο κατακόρυφο άξονα.



Σχήμα 2.10 Διαδικασία ασαφοποίησης. Οι αριθμοί $x_1=6$ και $x_2=15$ μετατρέπονται σε ασαφή σύνολα που δείχνονται με παχιές γραμμές ενεργοποιώντας έναν ασαφή αριθμό στο αντίστοιχο βασικό σύνολο κατά τον βαθμό συμμετοχής τους, ο οποίος υποδεικνύεται στον κατακόρυφο άξονα στο διάστημα $[0,1]$. Ο βαθμός ενεργοποίησης του κάθε κανόνα ισούται με το ελάχιστο (min) των βαθμών συμμετοχής των αριθμών $x_1=6$ και $x_2=15$ στα ασαφή σύνολα του αιτίου του κάθε κανόνα. Σημειώστε ότι ο κανόνας K1 δεν ενεργοποιείται.



Σχήμα 2.11 Ο βαθμός ενεργοποίησης του αιτίου του κάθε κανόνα χρησιμοποιείται για να υπολογίσει το μερικό (ασαφές) αποτέλεσμα του κάθε κανόνα. Η (συνολοθεωρητική) ένωση του μερικού αποτελέσματος κάθε κανόνα δίνει το ολικό αποτέλεσμα που δείχνεται μόνο του κάτω από όλους τους κανόνες. Με απο-ασαφοποίηση υπολογίζεται ένας αριθμός από το ολικό αποτέλεσμα που δείχνεται με μια παχιά κατακόρυφη γραμμή.

Η τελευταία πράξη που απομένει για να ολοκληρωθεί η περιγραφή του μηχανισμού του Σχήματος 2.6 είναι η **απο-ασαφοποίηση**, δηλ. η μετατροπή του ολικού ασαφούς αποτελέσματος σε ένα στοιχείο του πεδίου ορισμού \mathbf{T} της συνάρτησης $f: \mathfrak{R}^N \rightarrow \mathbf{T}$. Επειδή εδώ είναι $\mathbf{T}=\mathfrak{R}$ το ολικό ασαφές αποτέλεσμα με χαρακτηριστική συνάρτηση έστω $B(y)$ θα πρέπει να μετατραπεί σε έναν πραγματικό αριθμό η τιμή του οποίου δείχνεται με τη θέση της παχιάς κάθετης γραμμής στο ολικό ασαφές αποτέλεσμα του Σχήματος 2.11. Στη βιβλιογραφία έχουν προταθεί διάφορες τεχνικές απο-ασαφοποίησης [17]. Στη συνέχεια παρουσιάζουμε μερικές από αυτές.

Απο-ασαφοποίηση Μεγίστου

$$\hat{y}_M = \operatorname{argmax} B(y)$$

Από όλους τους αριθμούς του βασικού συνόλου επιλέγεται ο αριθμός \hat{y}_M στον οποίο μεγιστοποιείται η συνάρτηση $B(y)$. Αν υπάρχουν περισσότεροι από ένας τέτοιοι αριθμοί τότε επιλέγουμε κάποιον καλώς ορισμένο «μέσο (αριθμό)». Για παράδειγμα, για το ασαφές σύνολο στο Σχήμα 2.12(α) αυτή η τεχνική απο-ασαφοποίησης υπολογίζει $\hat{y}_M = \operatorname{argmax} B(y) = 5$. Ενώ, για το ασαφές σύνολο στο Σχήμα 2.12(β) είναι $\hat{y}_M = \operatorname{argmax} B(y) = (3+5)/5 = 4$.

Απο-ασαφοποίηση Διχοτόμου

$$\int_{-\infty}^{\hat{y}_\Delta} B(y)dy = \int_{\hat{y}_\Delta}^{+\infty} B(y)dy$$

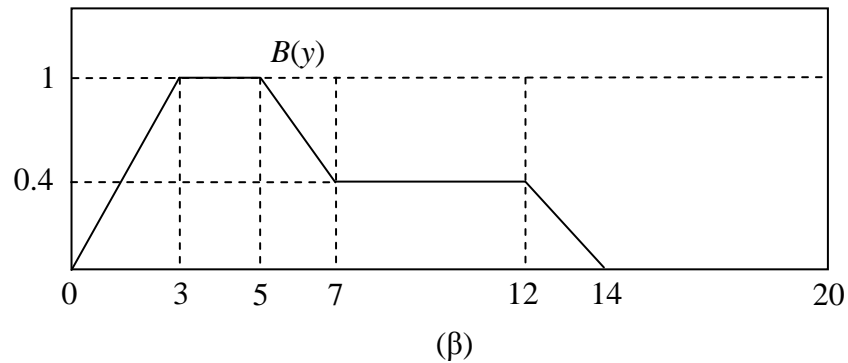
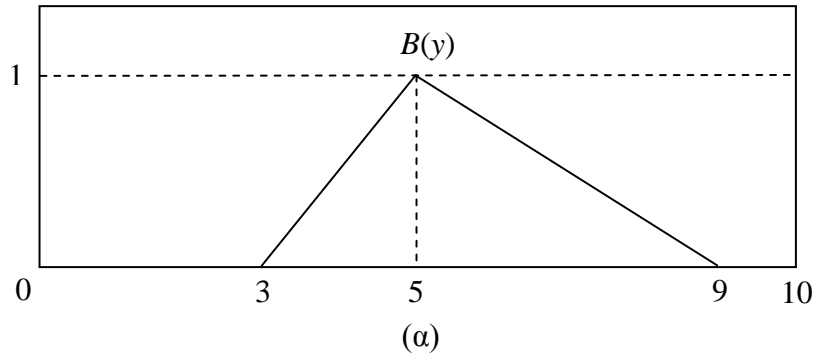
Από όλους τους αριθμούς του βασικού συνόλου επιλέγεται ο αριθμός \hat{y}_Δ ο οποίος διαμερίζει το εμβαδόν κάτω από την συνάρτηση $B(y)$ σε δύο ίσα μέρη. Για παράδειγμα, για το ασαφές σύνολο στο Σχήμα 2.12(α) αυτή η τεχνική απο-ασαφοποίησης υπολογίζει

$$1 + \int_5^{\hat{y}_\Delta} (-0.25y + 2.25)dy = \int_{\hat{y}_\Delta}^9 (-0.25y + 2.25)dy \Rightarrow \hat{y}_\Delta^2 - 18\hat{y}_\Delta + 69 = 0 \Rightarrow \hat{y}_\Delta \approx 5.536 \text{ (η}$$

άλλη λύση $\hat{y}_\Delta \approx 12.464$ απορρίπτεται). Ενώ, για το ασαφές σύνολο στο Σχήμα 2.12(β) υπολογίζει

$$\int_{-\infty}^{\hat{y}_\Delta} B(y)dy = \int_{\hat{y}_\Delta}^{+\infty} B(y)dy \Rightarrow 1.5 + 2 + \int_5^{\hat{y}_\Delta} (-0.3y + 2.5)dy = \int_{\hat{y}_\Delta}^7 (-0.3y + 2.5)dy + 2 + 0.4 \Rightarrow$$

$$0.3\hat{y}_\Delta^2 - 5\hat{y}_\Delta + 17.8 = 0 \Rightarrow \hat{y}_\Delta \approx 5.153 \text{ (η άλλη λύση } \hat{y}_\Delta \approx 11.513 \text{ απορρίπτεται).}$$



Σχήμα 2.12 Δύο ασαφείς αριθμοί που χρησιμοποιούνται στο κείμενο για να εξηγήσουν διάφορες τεχνικές απο-ασαφοποίησης. (α) Οι δύο πλευρές του τριγώνου περιγράφονται από τις εξισώσεις $B(y) = 0.5y - 1.5$ και $B(y) = -0.25y + 2.25$. (β) Η ευθεία στο διάστημα $[5, 7]$ περιγράφεται από την εξίσωση $B(y) = -0.3y + 2.5$.

Απο-ασαφοποίηση Κέντρου Βάρους

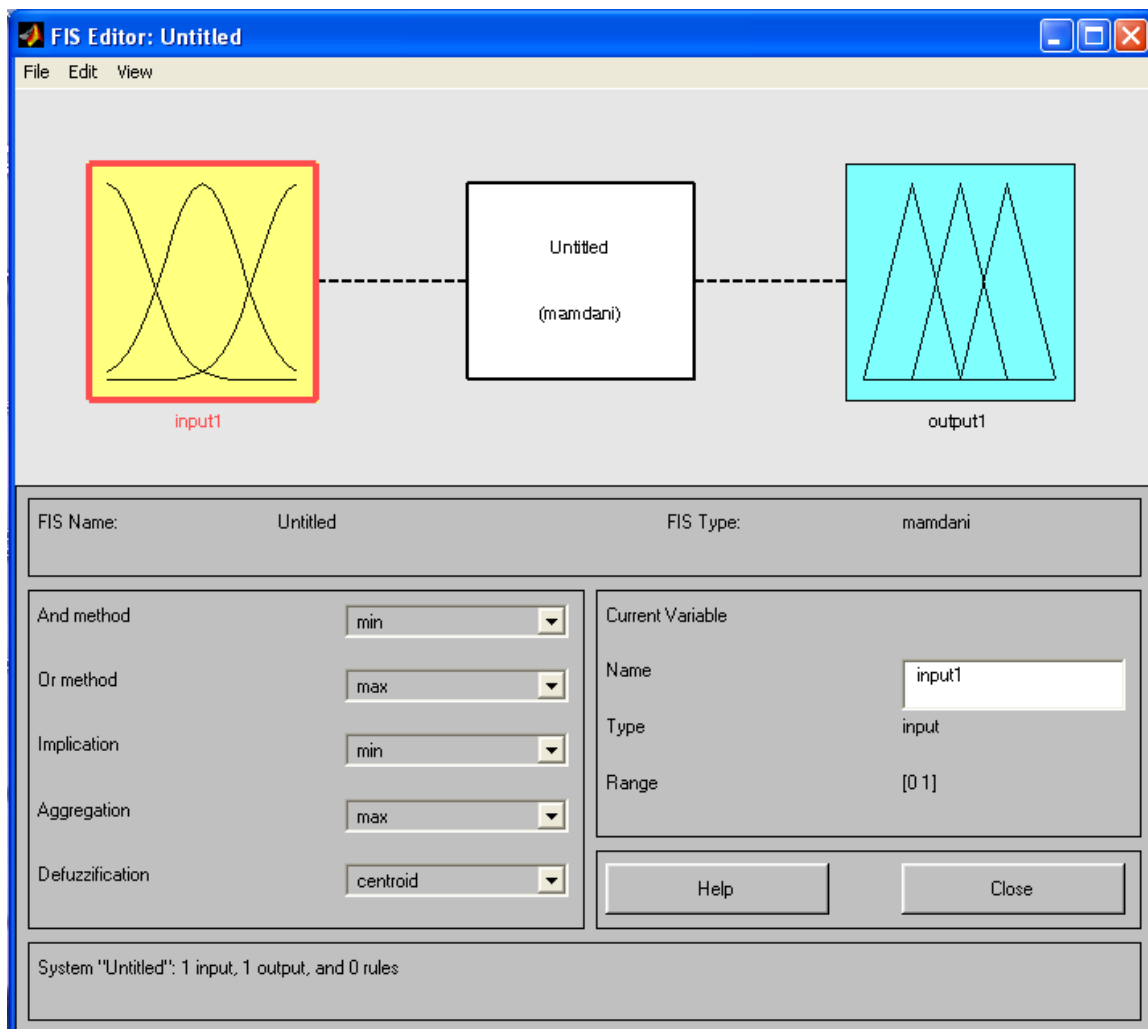
$$\hat{y}_{\text{KB}} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} yB(y)dy}{\int_{-\infty}^{+\infty} B(y)dy}$$

Αυτή είναι η δημοφιλέστερη μέθοδος απο-ασαφοποίησης διότι συνήθως δίνει καλά αποτελέσματα, ωστόσο είναι η πιο χρονοβόρα να υπολογιστεί. Για παράδειγμα, για το ασαφές σύνολο στο Σχήμα 2.12(α) αυτή η τεχνική απο-ασαφοποίησης υπολογίζει

$$\hat{y}_{\text{KB}} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} yB(y)dy}{\int_{-\infty}^{+\infty} B(y)dy} = \frac{\int_3^5 y(0.5y - 1.5)dy + \int_5^9 y(-0.25y - 2.25)dy}{3} = \frac{17}{3}.$$

Ο υπολογισμός του \hat{y}_{KB} για το ασαφές σύνολο στο Σχήμα 2.12(β) αφήνεται ως άσκηση.

Οπτικο-ακουστικό υλικό (video), όπου επιδεικνύεται η σχεδίαση του ασαφούς συστήματος Mamdani του προηγούμενου παραδείγματος πάνω στην πλατφόρμα MATLAB, είναι διαθέσιμο στον ακόλουθο σύνδεσμο: [Multimedia File](#). Συγκεκριμένα, στο Σχήμα 2.13 παρουσιάζεται ένα στιγμιότυπο του εισαγωγικού παράθυρου σχεδιασμού της εργαλειοθήκης «fuzzy» του MATLAB.



Σχήμα 2.13 Η εργαλειοθήκη «fuzzy» του MATLAB είναι ένα εκπαιδευτικό εργαλείο για τον σχεδιασμό Ασαφών Συστημάτων Συμπερασμού τύπου Mamdani ή τύπου Sugeno. Εδώ παρουσιάζεται το εισαγωγικό παράθυρο.

Οι προηγούμενες τεχνικές παρουσιάστηκαν σε συνεχή σύνολα αναφοράς. Εφαρμογές σε διακριτά (βλ. πεπερασμένα) σύνολα αναφοράς γίνονται απευθείας με βάση τις ίδιες αρχές. Για παράδειγμα, η απο-ασαφοποίηση μεγίστου ενός ασαφούς συνόλου

$$B = \{(y_k, B(y_k)) \mid y_k \in \Omega \subseteq \mathfrak{R}, B(y_k) \in [0,1] \text{ με } k \in \{1, \dots, K\}\}$$

υπολογίζεται ως $\hat{y}_M = \arg \max_{k \in \{1, \dots, K\}} B(y_k)$. Δηλαδή, είναι εκείνος ο αριθμός y_k του συνόλου

αναφοράς Ω ο οποίος χαρακτηρίζεται από τον μεγαλύτερο βαθμό συμμετοχής στο ασαφές σύνολο B . Αν υπάρχουν περισσότεροι από ένας τέτοιοι αριθμοί τότε επιλέγουμε κάποιον καλώς ορισμένο «μέσο (αριθμό)».

2.5.4 Παράδειγμα Sugeno

Έστω το ακόλουθο σύστημα Sugeno τριών κανόνων με δύο εισόδους τις (είσοδος1, είσοδος2) και μια έξοδο (την έξοδο1).

K1': EAN (η είσοδος1 είναι μικρή) ΚΑΙ (η είσοδος2 είναι κανονική) ΤΟΤΕ $y_1(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2$

K2': EAN (η είσοδος1 είναι μεγάλη) ΚΑΙ (η είσοδος2 είναι χαμηλή) ΤΟΤΕ $y_2(x_1, x_2) = 3x_1 + x_2 - 5$

K3': EAN (η είσοδος1 είναι μεσαία) ΚΑΙ (η είσοδος2 είναι υψηλή) ΤΟΤΕ $y_3(x_1, x_2) = 2x_1 + 1.2x_2 - 1$

Για απλότητα θεωρήσαμε τα αίτια των κανόνων K1', K2' και K3' ίδια με τα αίτια των κανόνων K1, K2 και K3, αντίστοιχα, του συστήματος Mamdani που μελετήσαμε παραπάνω. Έστω, ακόμα, ότι παρουσιάζονται οι ίδιες εισοδοί $x_1=6$ και $x_2=15$. Τότε, ο βαθμός ενεργοποίησης του αιτίου του κάθε κανόνα θα είναι ακριβώς όπως προηγουμένως, και για τους ίδιους λόγους. Συγκεκριμένα, ο βαθμός ενεργοποίησης του αιτίου του κανόνα K1' είναι $K1(x_1, x_2) = \min\{0,1\} = 0$, του αιτίου του κανόνα K2' είναι $K2(x_1, x_2) = \min\{0.4, 0.5\} = 0.5$, και του αιτίου του κανόνα K3' είναι $K3(x_1, x_2) = \min\{0.75, 0.167\} = 0.167$. Ωστόσο, το αποτέλεσμα κάθε κανόνα τώρα υπολογίζεται διαφορετικά όπως περιγράφεται στη συνέχεια. Συγκεκριμένα, το αριθμητικό αποτέλεσμα του κανόνα K1' υπολογίζεται χρησιμοποιώντας την γραμμική συνάρτηση $y_1(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2$ στο «αποτέλεσμα» του κανόνα K1'. Έτσι προκύπτει $y_1(6, 15) = 2*6 + 15 = 27$. Το αριθμητικό αποτέλεσμα του κανόνα K2' υπολογίζεται ως $y_2(6, 15) = 3*6 + 15 - 5 = 28$, και του κανόνα K3' υπολογίζεται ως $y_3(6, 15) = 2*6 + 1.2*15 - 1 = 29$. Παρατηρείστε ότι σε συστήματα Sugeno δεν υπάρχει ασάφεια στο αποτέλεσμα του

κάθε κανόνα αφού κάθε κανόνας υπολογίζει έναν συγκεκριμένο αριθμό. Ωστόσο, η ασάφεια υπεισέρχεται από το γεγονός ότι κάθε κανόνας έχει υπολογίσει έναν διαφορετικό αριθμητικό αποτέλεσμα και, επιπλέον, ο βαθμός ενεργοποίησης του κάθε κανόνα είναι διαφορετικός. Συνεπώς, υπάρχει και πάλι ανάγκη απο-ασαφοποίησης συναθροίζοντας, κατά κάποιο τρόπο, τα μερικά αποτελέσματα όλων των κανόνων της βάσης ώστε να παραχθεί η ολική έξοδος του Ασαφούς Μοντέλου Sugeno όπως δείχνεται στη συνέχεια.

$$\hat{y}_{\Sigma}(x_1, x_2) = \frac{K1(x_1, x_2)y_1(x_1, x_2) + K2(x_1, x_2)y_2(x_1, x_2) + K3(x_1, x_2)y_3(x_1, x_2)}{K1(x_1, x_2) + K2(x_1, x_2) + K3(x_1, x_2)} =$$

$$\frac{(0)(27) + (0.4)(28) + (0.167)(29)}{0 + 0.4 + 0.167} = 28.2945$$

2.5.5 Ένα Συνολοθεωρητικό Πλεονέκτημα

Ένα συνολοθεωρητικό πλεονέκτημα της μοντελοποίησης με *ασαφές σύστημα συμπερασμού* (είτε τύπου Mamdani είτε τύπου Sugeno) αντί μοντελοποίησης με παραμετρικό μοντέλο ΥΝ (π.χ. ένα κλασικό ΤΝΔ) είναι ότι ένα παραμετρικό μοντέλο ΥΝ μπορεί να υλοποιήσει «μόνον» \aleph_1 συναρτήσεις της μορφής $f: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$, ενώ ένα ασαφές σύστημα συμπερασμού μπορεί να υλοποιήσει \aleph_2 συναρτήσεις της μορφής $f: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$, όπου $\aleph_2 = 2^{\aleph_1} > \aleph_1$ και \aleph_1 είναι *πληθικότητα* του συνόλου \mathbb{R} των πραγματικών αριθμών [7]. Στο προαναφερθέν πλαίσιο επίσης υποστηρίζεται ότι η αποκλειστική χρήση απλών (π.χ. τριγωνικών) συναρτήσεων συμμετοχής σε ένα ασαφές σύστημα συμπερασμού αρκεί.

2.5.6 Μοντέλο Ταξινομητή

Έστω ένας ασαφής κανόνας τύπου είτε Mamdani « $R_M: A \rightarrow B$ » είτε τύπου Sugeno « $R_S: A \rightarrow y = f(x)$ ». Εάν αντικατασταθεί το αποτέλεσμα ενός από τους προαναφερθέντες κανόνες με το στοιχείο ενός πεπερασμένου συνόλου L τότε προκύπτει το μοντέλο ενός ταξινομητή. Δηλαδή το πεδίο ορισμού \mathbb{R}^N της συνάρτησης $f: \mathbb{R}^N \rightarrow T$ (Σχήμα 2.6) διαμερίζεται σε κατηγορίες.

2.5.7 Επεκτάσεις

Σε διάφορα στάδια υλοποίησης του μηχανισμού του Σχήματος 2.6 μπορούν να χρησιμοποιηθούν εναλλακτικές τεχνικές. Σημειώστε ότι στα παραπάνω παραδείγματα χρησιμοποιήθηκε η ασαφής συνεπαγωγή $I_M(a,b) = a \wedge b$. Ωστόσο, θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί κάποια άλλη ασαφής συνεπαγωγή. Επίσης, για τη σύζευξη των

κατηγορηματικών προτάσεων στο αίτιο ενός κανόνα χρησιμοποιήθηκε η τ-νόρμα $T_M(x,y) = \min\{x,y\}$. Ωστόσο, θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί κάποια άλλη τ-νόρμα. Συνήθως, η καλύτερη συνάρτηση επιλέγεται, κατά περίπτωση, μετά από δοκιμές σε υπολογιστικά πειράματα. Συχνά επιλέγεται η απλούστερη συνάρτηση.

Όλα τα παραπάνω ασαφή μοντέλα μπορούν εύκολα να επεκταθούν συμπεριλαμβάνοντας περισσότερες εισόδους A_1, \dots, A_N καθώς και περισσότερους κανόνες K_1, \dots, K_L .

Αυτό το κεφάλαιο παρουσίασε τις αρχές λειτουργίας και τη χρήση ενός ασαφούς μοντέλου τύπου Mamdani/Sugeno στα πλαίσια της Υπολογιστικής Νοημοσύνης. Οι ασαφείς κανόνες εδώ είναι σταθεροί και αμετάβλητοι. Στο [κεφάλαιο 4](#) παρουσιάζονται τεχνικές μεταβολής των κανόνων ενός ασαφούς μοντέλου έτσι ώστε να βελτιστοποιείται η προσέγγιση της συνάρτησης $f: \mathcal{R}^N \rightarrow \mathcal{T}$ από δείγματά της στο Καρτεσιανό γινόμενο $\mathcal{R}^N \times \mathcal{T}$.

2.5.8 Προβλήματα Κλασικών Ασαφών Μοντέλων

Ένα πρόβλημα προκύπτει όταν ο αριθμός των εισόδων A_1, \dots, A_N αυξάνει καθώς και όταν το σύνολο των δυνατών τιμών ανά είσοδο (βλ. Σχήμα 2.7) αυξάνει. Οι προαναφερθείσες αυξήσεις έχουν ως συνέπεια την εκθετική αύξηση, η τελευταία είναι γνωστή στην βιβλιογραφία ως **εκθετική έκρηξη**, του συνολικού αριθμού των κανόνων του ασαφούς μοντέλου, ενώ η καλή πρακτική απαιτεί την ύπαρξη μόνο λίγων κανόνων [11].

Ένα άλλο πρόβλημα είναι ότι τα κλασικά ασαφή μοντέλα (βλ. Σχήμα 2.6) δεν μπορούν να χειριστούν **αβεβαιότητα** στις εισόδους τους. Συγκεκριμένα, η είσοδος $x=(x_1, \dots, x_N)$ στο Σχήμα 2.6 επιτρέπεται να είναι ένα διάνυσμα αριθμών αλλά δεν επιτρέπεται να είναι N-άδα ασαφών αριθμών. Τα προαναφερθέντα προβλήματα αντιμετωπίζονται αποτελεσματικά στο [κεφάλαιο 9](#) χρησιμοποιώντας καινοτόμα μαθηματικά εργαλεία.

2.6 Υπολογισμός με Λέξεις

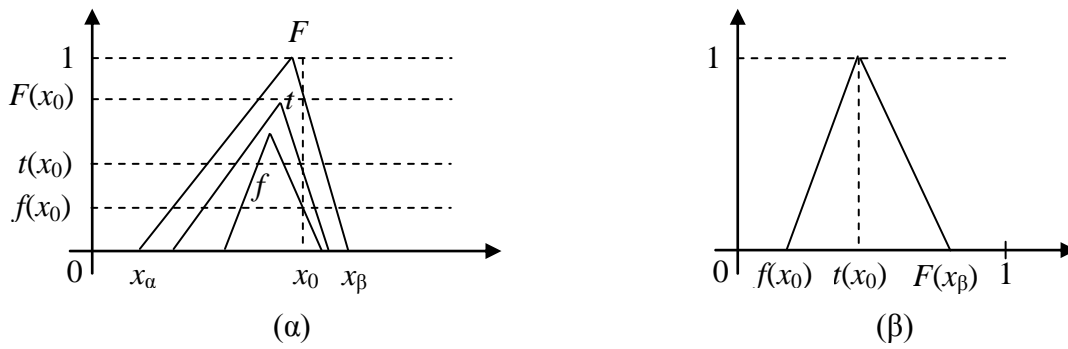
Όπως έχει προαναφερθεί, δοθέντος ενός συνόλου αναφοράς Ω , ένα γενικευμένο ασαφές σύνολο τύπου-2 έχει χαρακτηριστική συνάρτηση $A: \Omega \rightarrow [0,1]^{[0,1]}$, δηλ. ένα στοιχείο $x \in \Omega$ απεικονίζεται σε ένα στοιχείο του ασαφούς δυναμοσυνόλου $[0,1]^{[0,1]}$.

Το ενδιαφέρον μας εδώ εστιάζεται σε μια συγκεκριμένη κατηγορία γενικευμένων ασαφών συνόλων τύπου-2 τέτοια ώστε ένα στοιχείο $x \in \Omega = \mathfrak{R}$ απεικονίζεται σε έναν ασαφή αριθμό που ορίζεται πάνω στο σύνολο αναφοράς $[0,1]$. Το ασαφές σύνολο που προκύπτει **ονομάζεται ασαφής αριθμός τύπου-2**, ή **AA2** για συντομία [9], [14], [15]. Το Σχήμα 2.14 απεικονίζει έναν AA2 όπως εξηγείται στη συνέχεια.

Το Σχήμα 2.14(α) σημειώνει τρεις τριγωνικές χαρακτηριστικές συναρτήσεις με τα γράμματα f , t και F , οι οποίες ορίζονται στο σύνολο αναφοράς $\Omega = \mathfrak{R}$. Τέτοιες συναρτήσεις συμμετοχής όπως οι f , t και F ονομάζονται **πρωτεύουσες συναρτήσεις συμμετοχής**. Συγκεκριμένα, η f και F ονομάζονται **κάτω-** και **άνω- χαρακτηριστική συνάρτηση**, αντίστοιχα. Γενικά, κάθε AA2 χαρακτηρίζεται από μια *κάτω χαρακτηριστική συνάρτηση* f και από μια *άνω χαρακτηριστική συνάρτηση* F έτσι ώστε $f(x) \leq F(x)$, για κάθε $x \in \mathfrak{R}$.

Έστω μια κατακόρυφη ευθεία στη θέση x_0 του Σχήματος 2.14 (α) η οποία τέμνει τις συναρτήσεις f και F στα σημεία $(x_0, f(x_0))$ και $(x_0, F(x_0))$, αντίστοιχα. Το Σχήμα 2.14 (β) δείχνει μια **δευτερεύουσα συνάρτηση συμμετοχής** με τριγωνική χαρακτηριστική συνάρτηση που ορίζεται επάνω στο ευθύγραμμο τμήμα μεταξύ των σημείων $(x_0, f(x_0))$ και $(x_0, F(x_0))$. Έστω ότι όλες οι δευτερεύουσες συναρτήσεις συμμετοχής για κάθε x μεταξύ x_a και x_b έχουν τριγωνική χαρακτηριστική συνάρτηση έτσι ώστε οι κορυφές όλων των (τριγωνικών) δευτερευουσών συναρτήσεων συμμετοχής ορίζουν την συνάρτηση t .

Οι AA2 συγκεντρώνουν σήμερα, με μεγάλη διαφορά συγκριτικά με εναλλακτικές τεχνολογίες, το ενδιαφέρον της παγκόσμιας ερευνητικής κοινότητας που ασχολείται με ασαφή συστήματα. Από θεωρητική άποψη, έχει αναπτυχθεί επιχειρηματολογία ότι ένας AA2 μπορεί να αναπαραστήσει μια λέξη της (ομιλούμενης) γλώσσας. Συνεπώς, **υπολογισμός με λέξεις** μπορεί να επιδιωχθεί μέσω υπολογισμών με AA2. Από πρακτική (πειραματική) άποψη, η καλή επίδοση των AA2 αποδίδεται στο γεγονός ότι ένας AA2 αναπαριστάνει επιπλέον πληροφορία, στατιστικής φύσεως σχετικά με την κατανομή των μετρήσεων μεταξύ της πρωτεύουσας και της δευτερεύουσας συνάρτησης συμμετοχής. Ήδη έχουν προταθεί (και συνεχίζουν να προτείνονται) μεθοδολογίες οι οποίες επεκτείνουν σε AA2 τις ασαφείς τεχνικές που παρουσιάστηκαν σ' αυτό το κεφάλαιο.



Σχήμα 2.14 (α) Ένας AA2 ορίζεται ανάμεσα στις δύο πρωτεύουσες συναρτήσεις συμμετοχής f (κάτω χαρακτηριστική συνάρτηση) και F (άνω χαρακτηριστική συνάρτηση). Εδώ, η πρωτεύουσα συνάρτηση συμμετοχής t ορίζει τις κορυφές των δευτερευουσών (τριγωνικών) συναρτήσεων συμμετοχής.

(β) Η τριγωνική, δευτερεύουσα συνάρτηση συμμετοχής στη θέση $x = x_0$.

Ερωτήσεις Κατανόησης και Ασκήσεις Κεφαλαίου 2

- 2.1) Δοθέντων των πεπερασμένων ασαφών συνόλων $A = \{(1,0.1), (2,0.4), (3,0.7), (4,0.9), (*,1)\}$, $B = \{(a,0.4), (1,1), (2,0.5), (3,0.9), (4,0.2)\}$ και $\Gamma = \{(a,1), (1,0.3), (2,0.1), (4,0.9), (*,0.5)\}$ ορισμένα στο βασικό σύνολο $\Omega = \{a, 1, 2, 3, 4, *\}$ υπολογίστε τα ασαφή σύνολα $A \cup B$ και $A \cup (B \cap \Gamma)$ και $A \cap (B \cup \Gamma)$.
- 2.2) Έστω οι παρακάτω δύο ασαφείς αριθμοί.
 A : «ασαφές 2» = $\{0.1/0, 0.4/1, 1/2, 0.3/3, 0.1/4\}$
 B : «ασαφές 4» = $\{0.1/2, 0.2/3, 1/4, 0.5/5, 0.1/6\}$
 Να χρησιμοποιηθεί η Αρχή της Επέκτασης για να υπολογιστεί η απόλυτη τιμή της διαφοράς $|A - B| = |\text{«ασαφές 2»} - \text{«ασαφές 4»}|$.
- 2.3) Έστω η ασαφής σχέση $A(x_1, x_2, x_3) = \{((1, \beta, c), 0.7), ((1, \gamma, c), 0.4), ((2, a, d), 0.2), ((2, a, e), 1), ((2, \beta, e), 0.3), ((3, \beta, c), 0.4), ((3, \gamma, d), 0.8), ((3, \gamma, e), 1)\}$ και ο υποχώρος $H = X_1$ του $X = X_1 \times X_2 \times X_3 = \{1, 2, 3\} \times \{a, \beta, \gamma\} \times \{c, d, e\}$. Να ευρεθεί η προβολή της σχέσης $A(x_1, x_2, x_3)$ στον υποχώρο $H = X_1$.
- 2.4) Χρησιμοποιώντας την τεχνική απο-ασαφοποίησης «κέντρου βάρους» να υπολογίσετε τον αριθμό \hat{y}_{KB} στον οποίον απο-ασαφοποιείται το ασαφές σύνολο $B(y)$ του Σχήματος 2.12.
- 2.5) Έστω ένα ασαφές μοντέλο Sugeno με δύο εισόδους (τις input1, input2) και μια έξοδο (την output1) με τους ακόλουθους τρεις κανόνες
 $S1'$: EAN (η input1 είναι small) ΚΑΙ (η input2 είναι low) ΤΟΤΕ $y_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2 + 4$,
 $S2'$: EAN (η input1 είναι medium) ΚΑΙ (η input2 είναι normal) ΤΟΤΕ $y_2(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2$,
 $S3'$: EAN (η input1 είναι large) ΚΑΙ (η input2 είναι high) ΤΟΤΕ $y_3(x_1, x_2) = 3x_1 + x_2 - 3$,
 όπου όλα τα ασαφή σύνολα δείχνονται στο Σχήμα 2.7. Έστω οι εισοδοί $x_1 = 5$ και $x_2 = 16$. Να υπολογιστεί η ολική έξοδος $\hat{y}_\Sigma(x_1, x_2)$.
- 2.6) Έστω δύο ασαφή σύνολα $A = \{(a,1), (b,1), (c,0.7), (d,0.5), (e,0.2)\}$, $B = \{(1,0.1), (2,0.3), (3,0.6), (4,0.8), (5,0.9), (6,1)\}$, ο κανόνας $K: A \rightarrow B$, και το αίτιο $A' = \{(a,0.6), (b,0.8), (c,1), (d,0.7), (e,0.4)\}$. Χρησιμοποιώντας τον συνθετικό συμπερασματικό κανόνα του Zadeh και τη συνεπαγωγή κατά Lukasiewicz υπολογίστε το αποτέλεσμα B' που αντιστοιχεί στο αίτιο A' .

Βιβλιογραφία Κεφαλαίου 2

- [1] Γ. Α. Θεοδώρου, *Εισαγωγή στην Ασαφή Λογική (Fuzzy Logic)*. Θεσσαλονίκη, Εκδόσεις Τζιόλα, 2010.
- [2] Α. Χατζημιχαηλίδης, *Στοιχεία Διακριτών Μαθηματικών*. Θεσσαλονίκη, Εκδόσεις Τζιόλα, 2014.
- [3] R. Belohlavek, “Do exact shapes of fuzzy sets matter?”, *International Journal of General Systems*, vol. 36, no. 5, pp. 527-555, 2007.
- [4] S. Guillaume, “Designing fuzzy inference systems from data: an interpretability-oriented review”, *IEEE Trans. on Fuzzy Systems*, vol. 9, no. 3, pp. 426-443, 2001.
- [5] A.G. Hatzimichailidis, G.A. Papakostas, V.G. Kaburlasos, “A study on fuzzy D-implications”, *Proc. 10th Intl. FLINS Conf. on Uncertainty Modeling in Knowledge Engineering and Decision Making (FLINS 2012)*, Istanbul, Turkey, 26-29 August 2012.
- [6] V.G. Kaburlasos, *Towards a Unified Modeling and Knowledge-Representation Based on Lattice Theory*. Heidelberg, Germany: Springer, series: Studies in Computational Intelligence, vol. 27, 2006.
- [7] V.G. Kaburlasos, A. Kehagias, “Novel fuzzy inference system (FIS) analysis and design based on lattice theory”, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 15, no. 2, pp. 243-260, 2007.
- [8] V.G. Kaburlasos, A. Kehagias, “Fuzzy inference system (FIS) extensions based on lattice theory”, *IEEE Trans. on Fuzzy Systems*, vol. 22, no. 3, pp. 531-546, 2014.
- [9] N.N. Karnik, J.M. Mendel, Liang Qilian, “Type-2 fuzzy logic systems”, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 7, no. 6, pp. 643-658, 1999.
- [10] G.J. Klir, B. Yuan, *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic: Theory and Applications*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1995.
- [11] L.T. Kóczy, K. Hirota, “Size reduction by interpolation in fuzzy rule bases”, *IEEE Transactions on Systems, Man, Cybernetics – B*, vol. 27, no. 1, pp. 14-25, 1997.
- [12] E.H. Mamdani, S. Assilian, “An experiment in linguistic synthesis with a fuzzy logic controller”, *Intl. Journal of Man-Machine Studies*, vol. 7, no. 1, pp. 1-13, 1975.
- [13] A. Margaris, *First Order Mathematical Logic*. Mineola, NY: Dover Publications, 1990.
- [14] J.M. Mendel, “General type-2 fuzzy logic systems made simple: a tutorial”, *IEEE Trans. on Fuzzy Systems*, vol. 22, no. 5, pp. 1162-1182, 2014.

- [15] J.M Mendel, R.I. John, “Type-2 fuzzy sets made simple”, *IEEE Trans. on Fuzzy Systems*, vol. 10, no. 2, pp. 117-127, 2002.
- [16] H.T. Nguyen, E.A. Walker, *A First Course in Fuzzy Logic*, 3rd ed. Boca Raton: Chapman & Hall /CRC, 2005.
- [17] T.A. Runkler, “Selection of appropriate defuzzification methods using application specific properties”, *IEEE Trans. on Fuzzy Systems*, vol. 5, no. 1, pp. 72-79, 1997.
- [18] M. Sugeno, G.T. Kang, “Structure identification of fuzzy model”, *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 28, no. 1, pp. 15-33, 1988.
- [19] T. Takagi, M. Sugeno, “Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control”, *IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics*, vol. 15, no. 1, pp. 116-132, 1985.
- [20] L.A. Zadeh, “Fuzzy sets”, *Information and Control*, vol. 8, pp. 338-353, 1965.
- [21] L.A. Zadeh, “The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning – I”, *Information Sciences*, vol. 8, no. 3, pp. 199-249, 1975.
- [22] L.A. Zadeh, “From computing with numbers to computing with words -- from manipulation of measurements to manipulation of perceptions”, *IEEE Trans. on Circuits and Systems - I*, vol. 45, no. 1, pp. 105-119, 1999.

Κεφάλαιο 9: ΑΡΙΘΜΟΙ ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΩΝ (ΑΔ)

Αυτό το κεφάλαιο βασίζεται στην ειδική θεωρία του κεφαλαίου 7 για να παρουσιάσει μια δημοφιλή ιεραρχία πλεγμάτων η οποία εδώ αναπτύσσεται προοδευτικά ξεκινώντας από την αλυσίδα (\mathbb{R}, \leq) των πραγματικών αριθμών. Επιπλέον, παρουσιάζονται κάποια καινοτόμα μαθηματικά εργαλεία δίνοντας νέες προοπτικές στην ΥΝ. Είναι ενδιαφέρον να ανακαλέσουμε κάποια γεγονότα σχετικά με το σύνολο \mathbb{R} στη συνέχεια.

Το σύνολο \mathbb{R} των πραγματικών αριθμών προκύπτει ως αποτέλεσμα **μετρήσεων** [6]. Συγκεκριμένα, κάποιο ενδιαφέρον μέγεθος μετριέται συγκρίνοντάς το επαναληπτικά με ένα (ομοειδές) πρότυπο μέγεθος, το οποίο καλείται «μέτρο», καθώς και με υποδιαίρεσεις του τελευταίου. Το πηλίκο και το υπόλοιπο μιας μέτρησης μαζί ορίζουν έναν πραγματικό αριθμό.

Το σύνολο \mathbb{R} μελετήθηκε κατά την διάρκεια περίπου 2.500 ετών από την εποχή των πρωτοπόρων **Πυθαγόρειων φιλοσόφων/μαθηματικών** (6^{ος} αι. π.Χ.), οι οποίοι διακήρυτταν ότι οι (φυσικοί) αριθμοί είναι η ουσία των πάντων. Συγκεκριμένα, οι Πυθαγόρειοι θεωρούσαν ότι η αρμονία στο σύμπαν περιγράφεται με αριθμούς, όπου οποιοσδήποτε αριθμός μπορούσε να αναπαρασταθεί ως κλάσμα δύο φυσικών αριθμών. Δηλαδή, οι Πυθαγόρειοι θεωρούσαν μόνον τους αριθμούς που σήμερα ονομάζουμε **ρητούς**.

Λίγους αιώνες μετά την εμφάνισή της, υπό το «βάρος» της ανακάλυψης κάποιων μη-ρητών (βλ. **άρρητων**) αριθμών, η Σχολή των Πυθαγόρειων κατέρρευσε. Γύρω στις αρχές του 20^{ου} αιώνα αποδείχθηκε ότι το πλήθος των άρρητων αριθμών είναι μη-αριθμήσιμο, δηλ. οι άρρητοι αριθμοί είναι περισσότεροι από τους ρητούς. Το σύνολο όλων των αριθμών (ρητών και άρρητων μαζί) ονομάστηκε σύνολο των πραγματικών αριθμών, συμβολικά \mathbb{R} . Διάφορες ιδιότητες του συνόλου \mathbb{R} μελετήθηκαν. Μια ενδιαφέρουσα ιδιότητα, στα πλαίσια αυτού του βιβλίου, είναι ότι το σύνολο \mathbb{R} των πραγματικών αριθμών είναι ολικώς διατεταγμένο. Στην ολική διάταξη του συνόλου \mathbb{R} θα βασιστούμε σ' αυτό το κεφάλαιο για να παρουσιάσουμε μια δημοφιλή ιεραρχία πλεγμάτων.

9.1 Μια Δημοφιλής Ιεραρχία Πλεγμάτων

Αυτή η ενότητα παρουσιάζει μία δημοφιλή ιεραρχία πλεγμάτων σε έξι επίπεδα. Ένα επιπλέον επίπεδο σκιαγραφείται ως επέκταση των προαναφερθέντων έξι επιπέδων.

9.1.1 Επίπεδο-0: Το Πλέγμα (\mathbb{R}, \leq) των Πραγματικών Αριθμών

Η αλυσίδα (\mathbb{R}, \leq) των πραγματικών αριθμών δεν είναι πλήρες πλέγμα [2]. Ωστόσο, μπορεί να μετατραπεί σε πλήρες πλέγμα με την εισαγωγή ενός ελάχιστου στοιχείου $o = -\infty$ και ενός μέγιστου στοιχείου $i = +\infty$, οπότε προκύπτει το πλήρες πλέγμα $(\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}, \leq)$.

Έστω ένα πλήρες πλέγμα $(L=[o,i], \leq)$ πραγματικών αριθμών, με ελάχιστο και μέγιστο στοιχείο το $o \in \bar{\mathbb{R}}$ και $i \in \bar{\mathbb{R}}$, αντίστοιχα, όπου $o < i$. Το μέγιστο κάτω φράγμα δύο αριθμών x και y είναι ο μικρότερος από τους δύο, συμβολικά $x \wedge y$, ενώ το ελάχιστο άνω φράγμα δύο αριθμών είναι ο μεγαλύτερος από τους δύο, συμβολικά $x \vee y$. Ως συνάρτηση θετικής τιμοδότησης $v: L \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ στο πλέγμα (L, \leq) θα θεωρήσουμε μια γνησίως αύξουσα συνάρτηση τέτοια ώστε να ικανοποιούνται οι δύο λογικές απαιτήσεις $v(o)=0$ και $v(i) < +\infty$. Επιπλέον, ως συνάρτηση δυτικού ισομορφισμού $\theta: L \rightarrow L$ στο πλέγμα (L, \leq) θα θεωρήσουμε μια γνησίως φθίνουσα συνάρτηση τέτοια ώστε $\theta(o)=i$ καθώς και $\theta(i)=o$. Για παράδειγμα, πρώτον, στο πλήρες πλέγμα $(L=[-\infty, +\infty], \leq)$ μπορούμε να θεωρήσουμε την σιγμοειδή συνάρτηση $v(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$ και την γραμμική συνάρτηση $\theta(x) = -x$. Δεύτερον, στο πλήρες πλέγμα $(L=[0,1], \leq)$ μπορούμε να θεωρήσουμε τις συναρτήσεις $v(x) = x$ και $\theta(x) = 1-x$. Γενικά, παραμετρικές συναρτήσεις $\theta(\cdot)$ και $v(\cdot)$ εισάγουν ρυθμίσιμες μη-γραμμικότητες των οποίων οι παράμετροι μπορούν να εκτιμηθούν βέλτιστα με διάφορες τεχνικές, π.χ. με εξελικτικό υπολογισμό, κλπ.

Σε κάθε περίπτωση, δοθείσης μιας συνάρτησης $v: L \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ θετικής τιμοδότησης έπεται μια μετρική $d: L \times L \rightarrow \mathbb{R}_0^+$, η οποία δίνεται από τον τύπο $d(x,y) = v(x \vee y) - v(x \wedge y)$.

9.1.2 Επίπεδο-1: Το Πλέγμα (I_1, Ξ) των Διαστημάτων Τύπου-1 (T1)

Ο υπολογισμός με διαστήματα έχει μακρά ιστορία σε πρακτικές χειρισμού της αβεβαιότητας κατά τους υπολογισμούς [1], [18], [24]. Σ' αυτό το κεφάλαιο περιγράφεται μια διαφορετική προσέγγιση, στα πλαίσια της θεωρίας διάταξης, με έμφαση στην σημασιολογία και στην (κοινή) λογική παρά στην άλγεβρα.

Θεωρούμε το μερικώς διατεταγμένο πλέγμα (I_1, Ξ) των διαστημάτων T1 σε κάποιο πλήρες πλέγμα $(L=[o,i], \leq)$ πραγματικών αριθμών. Το μέγιστο κάτω φράγμα δύο διαστημάτων T1 $[a,b]$ και $[c,e]$ δίνεται από τη σχέση $[a,b] \sqcap [c,e] = [a \vee c, b \wedge e]$ εάν $a \vee c \leq b \wedge e$, και $[a,b] \sqcap [c,e] = \emptyset = [i,o]$ εάν $a \vee c > b \wedge e$. Ενώ, το ελάχιστο άνω φράγμα δύο διαστημάτων T1 $[a,b]$ και $[c,e]$ δίνεται από τη σχέση $[a,b] \sqcup [c,e] = [a \wedge c, b \vee e]$. Υπενθυμίζεται ότι το κενό σύνολο \emptyset στο πλέγμα $(L=[o,i], \leq)$ αναπαριστάται ως $[i,o]$.

Δοθέντων (α) μιας συνάρτησης $\nu: L \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ θετικής τιμοδότησης, και (β) μιας συνάρτησης $\theta: L \rightarrow L$ δυικού ισομορφισμού στο πλέγμα (L, \leq) , όπως έχει παρουσιαστεί λεπτομερώς στο Επίπεδο-0, έπεται μια συνάρτηση $\nu_1: L \times L \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ θετικής τιμοδότησης στο πλέγμα $(L \times L, \geq \times \leq)$ των γενικευμένων διαστημάτων, η οποία δίδεται από τον τύπο $\nu_1([a,b]) = \nu(\theta(a)) + \nu(b)$. Συνεπώς, μπορεί να οριστεί τόσο μια μετρική συνάρτηση $d_1(.,.)$ όσο και δύο συναρτήσεις βαθμού διάταξης $\sigma_\pi(.,.)$ και $\sigma_\mu(.,.)$ στο πλέγμα $(L \times L, \geq \times \leq)$. Οι προαναφερθείσες συναρτήσεις ισχύουν ως τέτοιες στο υποπλέγμα (I_1, Ξ) , το οποίο είναι εμφυτευμένο στο υπερπλέγμα $(L \times L, \geq \times \leq)$. Συγκεκριμένα, οι ακόλουθες τρεις συναρτήσεις είναι διαθέσιμες στο (I_1, Ξ) .

Μια μετρική συνάρτηση $d_1: I_1 \times I_1 \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ στο πλέγμα (I_1, Ξ) υπολογίζεται ως ακολούθως:

$$d_1([a,b], [c,e]) = [\nu(\theta(a \wedge c)) - \nu(\theta(a \vee c))] + [\nu(b \vee e) - \nu(b \wedge e)] = d(\theta(a), \theta(c)) + d(b, e) \quad (9.1)$$

Δύο βαθμοί διάταξης $\sigma_\pi: I_1 \times I_1 \rightarrow [0,1]$ και $\sigma_\mu: I_1 \times I_1 \rightarrow [0,1]$ στο πλέγμα (I_1, Ξ) , υπολογίζονται ως ακολούθως:

$$\sigma_{\sqcap}(x=[a,b], y=[c,e]) = \begin{cases} 1, & x = \emptyset \\ \frac{v_1(x \sqcap y)}{v_1(x)} = \frac{v(\theta(a \vee c)) + v(b \wedge e)}{v(\theta(a)) + v(b)}, & x \supset \emptyset \end{cases} \quad (9.2)$$

$$\sigma_{\sqcup}(x=[a,b], y=[c,e]) = \begin{cases} 1, & x \sqcup y = \emptyset \\ \frac{v_1(y)}{v_1(x \sqcup y)} = \frac{v(\theta(c)) + v(e)}{v(\theta(a \wedge c)) + v(b \vee e)}, & x \sqcup y \supset \emptyset \end{cases} \quad (9.3)$$

Ένα διάστημα T1 πλην του κενού συνόλου, εδώ θα ονομάζεται **συνηθισμένο διάστημα T1**. Το μδσυν όλων των συνηθισμένων διαστημάτων T1 θα συμβολίζεται με (I_{1p}, \subseteq) . Η συνάρτηση $\delta_1: I_{1p} \rightarrow \mathbf{R}_0^+$, η οποία υπολογίζεται ως $\delta_1([a,b]) = v_1([a,b]) = v(\theta(a)) + v(b)$ είναι μια συνάρτηση *μεγέθους* στο μδσυν (I_{1p}, \subseteq) . Συγκεκριμένα, η αναφερθείσα στο Κεφάλαιο 7 συνάρτηση μεγέθους $\delta_1([a,b]) = v(b) - v(a)$ προκύπτει όπως εξηγείται στη συνέχεια.

Οι συναρτήσεις $\theta(\cdot)$ και $v(\cdot)$ μπορούν να επιλεγούν με διάφορους τρόπους. Για παράδειγμα, επιλέγοντας $\theta(x) = -x$ και $v(\cdot)$ έτσι ώστε $v(x) = -v(-x)$ προκύπτει η συνάρτηση θετικής τιμοδότησης $v_1([a,b]) = v(b) - v(a) = \delta_1([a,b])$. Συνεπώς, έπεται η μετρική $d_1([a,b],[c,e]) = [v(a \vee c) - v(a \wedge c)] + [v(b \vee e) - v(b \wedge e)]$. Ειδικότερα, για $v(x) = x$ προκύπτει η L_1 (Hamming) μετρική $d_1([a,b],[c,e]) = |a-c| + |b-e|$.

9.1.3 Επίπεδο-2: Το Πλέγμα (I_2, Ξ) των Διαστημάτων Τύπου-2 (T2)

Ένα **διάστημα Τύπου-2 (T2)** ορίζεται ως ένα διάστημα διαστημάτων T1. Για παράδειγμα, ένα διάστημα T2 είναι το $[[a_1, a_2], [b_1, b_2]]$, όπου $[a_1, a_2]$ και $[b_1, b_2]$ είναι διαστήματα T1, δηλ. $[a_1, a_2], [b_1, b_2] \in (I_1, \Xi)$, με $[a_1, a_2] \Xi [b_1, b_2]$.

Έστω (I_2, Ξ) το μερικώς διατεταγμένο πλέγμα των διαστημάτων T2 που προκύπτουν σε ένα συγκεκριμένο πλέγμα (I_1, Ξ) διαστημάτων T1. Το *μέγιστο κάτω φράγμα* δύο διαστημάτων T2 έστω $[[a_1, a_2], [b_1, b_2]]$ και $[[c_1, c_2], [e_1, e_2]]$ δίνεται από τη σχέση $[[a_1, a_2], [b_1, b_2]] \Pi [[c_1, c_2], [e_1, e_2]] = [[a_1 \wedge c_1, a_2 \vee c_2], [b_1 \vee e_1, b_2 \wedge e_2]]$ εάν $[a_1 \wedge c_1, a_2 \vee c_2] \Xi [b_1 \vee e_1, b_2 \wedge e_2]$, και

$[[a_1, a_2], [b_1, b_2]] \sqcap [[c_1, c_2], [e_1, e_2]] = \emptyset = [[o, i], [i, o]]$ εάν $[a_1 \wedge c_1, a_2 \vee c_2] \not\sqsubseteq [b_1 \vee e_1, b_2 \wedge e_2]$. Ενώ, το αντίστοιχο ελάχιστο άνω φράγμα δίνεται από τη σχέση $[[a_1, a_2], [b_1, b_2]] \sqcup [[c_1, c_2], [e_1, e_2]] = [[a_1 \vee c_1, a_2 \wedge c_2], [b_1 \wedge e_1, b_2 \vee e_2]]$. Υπενθυμίζεται ότι το κενό σύνολο \emptyset στο πλέγμα (I_2, Ξ) αναπαριστάνεται ως $[[o, i], [i, o]]$.

Από το Επίπεδο-1 ανακαλέστε την συνάρτηση $v_1: L \times L \rightarrow R_0^+$ θετικής τιμοδότησης στο πλέγμα $(L \times L, \geq \times \leq)$, η οποία δίνεται από τον τύπο $v_1([a, b]) = v(\theta(a)) + v(b)$. Επιπλέον, η συνάρτηση $\theta_1: L \times L \rightarrow L \times L$, η οποία δίνεται από τον τύπο $\theta_1([a, b]) = [b, a]$ είναι *δυσικού ισομορφισμού* στο πλέγμα $(L \times L, \geq \times \leq)$ των γενικευμένων διαστημάτων, όπως ζητείται να αποδειχθεί σε ερώτηση κατανόησης στο τέλος αυτού το κεφαλαίου. Σύμφωνα με τα προηγούμενα έπεται μια συνάρτηση $v_2: L \times L \times L \times L \rightarrow R_0^+$ θετικής τιμοδότησης, στο πλήρες πλέγμα $(L \times L \times L \times L, \leq \times \geq \times \geq \times \leq)$ των γενικευμένων διαστημάτων, η οποία δίδεται από τον τύπο $v_2([[a_1, a_2], [b_1, b_2]]) = v_1(\theta_1([a_1, a_2])) + v_1([b_1, b_2]) = v(a_1) + v(\theta(a_2)) + v(\theta(b_1)) + v(b_2)$. Συνεπώς, μπορεί να οριστεί τόσο μια μετρική συνάρτηση $d_2(\dots)$ όσο και δύο συναρτήσεις βαθμού διάταξης $\sigma_\pi(\dots)$ και $\sigma_\mu(\dots)$ στο πλέγμα $(L \times L \times L \times L, \leq \times \geq \times \geq \times \leq)$. Οι προαναφερθείσες συναρτήσεις ισχύουν ως τέτοιες στο υποπλέγμα (I_2, Ξ) , το οποίο είναι εμφυτευμένο στο υπερπλέγμα $(L \times L \times L \times L, \leq \times \geq \times \geq \times \leq)$. Συγκεκριμένα, οι ακόλουθες τρεις συναρτήσεις είναι διαθέσιμες στο (I_2, Ξ) .

Μια μετρική συνάρτηση $d_2: I_2 \times I_2 \rightarrow R_0^+$ στο πλέγμα (I_2, Ξ) υπολογίζεται ως ακολούθως:

$$d_2([[a_1, a_2], [b_1, b_2]], [[c_1, c_2], [e_1, e_2]]) = d(a_1, c_1) + d(\theta(a_2), \theta(c_2)) + d(\theta(b_1), \theta(e_1)) + d(b_2, e_2) \quad (9.4)$$

Δύο βαθμοί διάταξης $\sigma_\pi: I_2 \times I_2 \rightarrow [0, 1]$ και $\sigma_\mu: I_2 \times I_2 \rightarrow [0, 1]$ στο πλέγμα (I_2, Ξ) , υπολογίζονται ως ακολούθως:

$$\sigma_\pi([[a_1, a_2], [b_1, b_2]], [[c_1, c_2], [e_1, e_2]]) =$$

$$= \begin{cases} 1, & b_1 > b_2 \\ 0, & b_1 \leq b_2, \quad b_1 \vee d_1 > b_2 \wedge d_2 \\ 0, & b_1 \leq b_2, \quad b_1 \vee d_1 \leq b_2 \wedge d_2, \quad [a_1 \wedge c_1, a_2 \vee c_2] \not\subseteq [b_1 \vee e_1, b_2 \wedge e_2] \\ \frac{v_2([a_1, a_2], [b_1, b_2]) \sqcap [c_1, c_2], [e_1, e_2])}{v_2([a_1, a_2], [b_1, b_2])}, & \text{διαφορετικά} \end{cases} \quad (9.5)$$

$$\sigma_{\sqcup}([a_1, a_2], [b_1, b_2], [c_1, c_2], [e_1, e_2]) = \begin{cases} 1, & b_1 > b_2 \\ 0, & b_1 \leq b_2, \quad e_1 > e_2 \\ \frac{v_2([c_1, c_2], [e_1, e_2])}{v_2([a_1, a_2], [b_1, b_2]) \sqcup [c_1, c_2], [e_1, e_2])}, & \text{διαφορετικά} \end{cases} \quad (9.6)$$

Ένα διάστημα T2 πλην του κενού συνόλου, εδώ θα ονομάζεται **σνηθισμένο διάστημα T2**.

Το μδσυν όλων των σνηθισμένων διαστημάτων T2 θα συμβολίζεται με $(\mathbb{I}_{2p}, \subseteq)$.

Το μέγεθος ενός σνηθισμένου διαστήματος T2, έστω $[a_1, a_2], [b_1, b_2]$, είναι μια συνάρτηση $\delta_2: \mathbb{I}_{2p} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$, η οποία υπολογίζεται ως $\delta_2([a_1, a_2], [b_1, b_2]) = v_1([b_1, b_2]) - v_1([a_1, a_2]) = v(\theta(b_1)) + v(b_2) - v(\theta(a_1)) - v(a_2)$.

9.1.4 Επίπεδο-3: Το Πλέγμα (F_1, \leq) των Αριθμών Διαστημάτων Τύπου-1 (ΑΔ T1)

Στην θεωρία ασαφών συνόλων (βλ. κεφάλαιο 2) προαναφέρθηκε το *θεώρημα της ταυτοποίησης*, το οποίο λέει ότι ένα ασαφές σύνολο μπορεί να αναπαρασταθεί, ισοδύναμα, είτε με την συνάρτηση συμμετοχής του ή με το σύνολο των α -διατομών του. Το θεώρημα της ταυτοποίησης εδώ χρησιμοποιείται ως ακολούθως. Κατ' αρχήν, εγκαταλείπεται η ερμηνεία της *εφικτότητας* μιας (ασαφούς) συνάρτησης συμμετοχής ασαφών αριθμών. Κατόπιν, θεωρείται η αντίστοιχη αναπαράσταση με α -διατομές. Τελικά, προκύπτει ένας αριθμός διαστημάτων (ΑΔ) όπως εξηγείται λεπτομερώς παρακάτω. Πρώτα, όμως, ορίζουμε έναν γενικότερο τύπο αριθμού στη συνέχεια.

Ένας **Γενικευμένος Αριθμός Διαστημάτων (ΓΑΔ)** ορίζεται ως μια συνάρτηση $f: [0,1] \rightarrow (\bar{\mathbb{R}} \times \bar{\mathbb{R}}, \geq \times \leq)$, όπου $(\bar{\mathbb{R}} \times \bar{\mathbb{R}}, \geq \times \leq)$ είναι πλέγμα γενικευμένων διαστημάτων.

Έστω \mathbf{G} το σύνολο των ΓΑΔ. Έπεται ότι το (\mathbf{G}, Ξ) είναι πλήρες πλέγμα, ως (μη-αριθμήσιμο) Καρτεσιανό γινόμενο πλήρων πλεγμάτων $(\bar{\mathbf{R}} \times \bar{\mathbf{R}}, \geq \times \leq)$. Στη συνέχεια, το ενδιαφέρον στρέφεται στο υποπλέγμα των αριθμών διαστημάτων (ΑΔ).

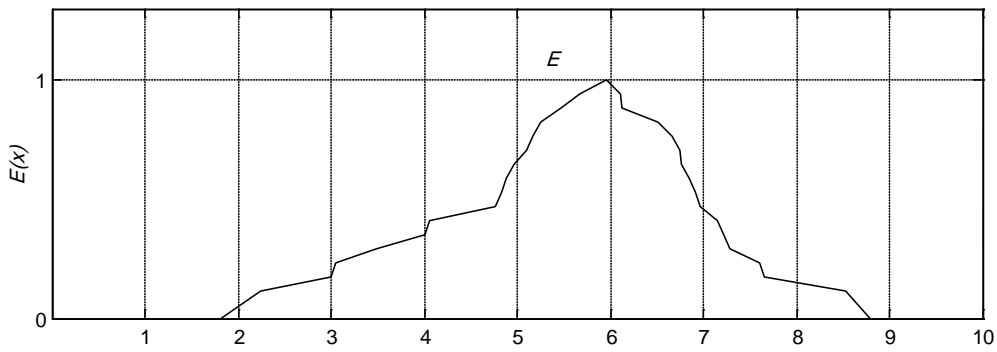
Ένας **Αριθμός Διαστημάτων (ΑΔ) Τύπου-1 (T1)**, ή ΑΔ για συντομία, ορίζεται ως μια συνάρτηση $F: [0,1] \rightarrow I_1$, η οποία ικανοποιεί τις ακόλουθες δύο σχέσεις 1) $h_1 \leq h_2 \Rightarrow F_{h_1} \supseteq F_{h_2}$ και 2) $\forall X \subseteq [0,1]: \bigcap_{h \in X} F_h = F_{\bigvee X}$.

Το σύνολο F_1 των ΑΔ (T1) είναι μερικώς διατεταγμένο, πλήρες πλέγμα, το οποίο συμβολίζεται ως (F_1, \leq) . Ένας ΑΔ ερμηνεύεται ως *κόκκος πληροφορίας* [10]. Το σύνολο F_1 των ΑΔ έχει μελετηθεί σε μια σειρά από εργασίες. Συγκεκριμένα, έχειδειχθεί ότι το σύνολο F_1 είναι μετρικό πλέγμα [5] με **πληθικότητα** ίση με την πληθικότητα \aleph_1 του συνόλου \mathbf{R} των πραγματικών αριθμών [7]. Με άλλα λόγια, υπάρχουν τόσοι ΑΔ όσοι και πραγματικοί αριθμοί. Επιπλέον, το σύνολο F_1 είναι κώνος σε έναν γραμμικό χώρο [20].

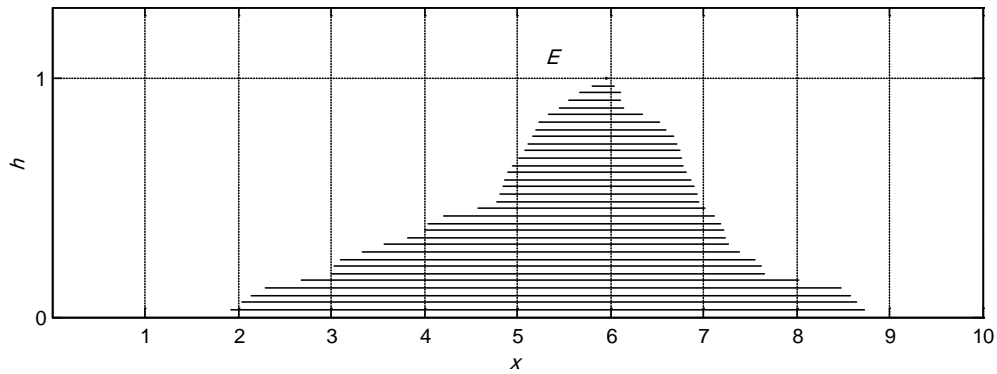
Ένας ΑΔ μπορεί, ισοδύναμα, να αναπαρασταθεί είτε με ένα σύνολο διαστημάτων F_h , $h \in [0,1]$, αυτή είναι η *αναπαράσταση-διαστημάτων*, είτε με μια συνάρτηση $F(x) = \bigvee_{h \in (0,1]} \{h : x \in F_h\}$, αυτή είναι η *αναπαράσταση-συνάρτησης-συμμετοχής* όπως φαίνεται στο

Σχήμα 9.1. Η διατομή (λ) και η συνένωση (γ) στο πλέγμα (F_1, \leq) δίνονται ως $(F\gamma G)_h = F_h \sqcup G_h$ και $(F\lambda G)_h = F_h \cap G_h$, αντίστοιχα. Για παράδειγμα, το Σχήμα 9.2 δείχνει τον υπολογισμό της συνένωσης (γ) και της διατομής (λ) δύο ΑΔ F και G , αντίστοιχα, χρησιμοποιώντας αναπαραστάσεις συνάρτησης-συμμετοχής.

Ως **στήριγμα** ή, ισοδύναμα, **φορέα** ενός ΑΔ ορίζουμε το ελάχιστο άνω φράγμα διάστημα $\bigvee_{h \in (0,1]} F_h$. Τυπικά, τα ΑΔ που χρησιμοποιούνται στην πράξη έχουν συνεχείς συναρτήσεις συμμετοχής, συνεπώς ισχύει η ισότητα $\bigvee_{h \in (0,1]} F_h = F_0$, δηλ. το στήριγμα ενός $F \in F_1$ είναι η «βάση» του για $h=0$.



(α)



(β)

Σχήμα 9.1 Οι δύο ισοδύναμες αναπαραστάσεις ενός Αριθμού Διαστημάτων (ΑΔ). (α) Η αναπαράσταση-συνάρτησης-συμμετοχής. (β) Η αναπαράσταση-διαστημάτων.

Για ΑΔ $F, G \in \mathbf{F}_1$ έχει αποδειχθεί η επόμενη ισοδυναμία [8]

$$F \preceq G \Leftrightarrow (\forall h \in [0, 1]: F_h \sqsubseteq G_h) \Leftrightarrow (\forall x \in \mathbf{L}: F(x) \leq G(x))$$

Ως ύψος ενός ΑΔ E , συμβολικά $hgt(E)$, ορίζεται το ελάχιστο άνω φράγμα (\vee) όλων των αντίστοιχων βαθμών συμμετοχής, δηλ. $hgt(E) = \vee_{x \in [0, i]} E(x)$. Για παράδειγμα, στο Σχήμα

9.1(α) είναι $hgt(E) = 1$, ενώ στο Σχήμα 9.2(γ) είναι $hgt(F \wedge G) = h_1$.

Στη συνέχεια ορίζονται δύο βαθμοί διάταξης $\sigma_\lambda: \mathbf{F}_1 \times \mathbf{F}_1 \rightarrow [0, 1]$ και $\sigma_\gamma: \mathbf{F}_1 \times \mathbf{F}_1 \rightarrow [0, 1]$, στη βάση των βαθμών διάταξης $\sigma_\pi: \mathbf{I}_1 \times \mathbf{I}_1 \rightarrow [0, 1]$ και $\sigma_\mu: \mathbf{I}_1 \times \mathbf{I}_1 \rightarrow [0, 1]$, αντίστοιχα.

$$\sigma_{\lambda}(E,F)=\int_0^1\sigma_{\square}(E_h,F_h)dh \quad (9.7)$$

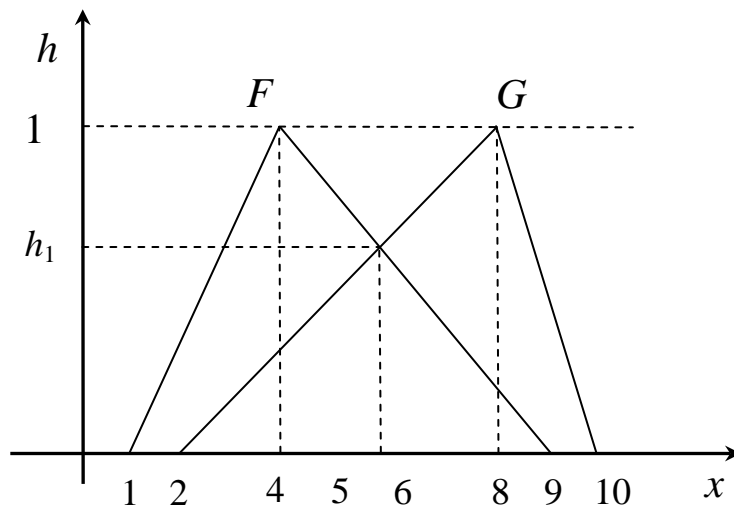
$$\sigma_{\nu}(E,F)=\int_0^1\sigma_{\sqcup}(E_h,F_h)dh \quad (9.8)$$

Ένα (μαθηματικό) αποτέλεσμα με σημαντικές προεκτάσεις παρουσιάζεται στη συνέχεια, με αναφορά στο Σχήμα 9.3 [8].

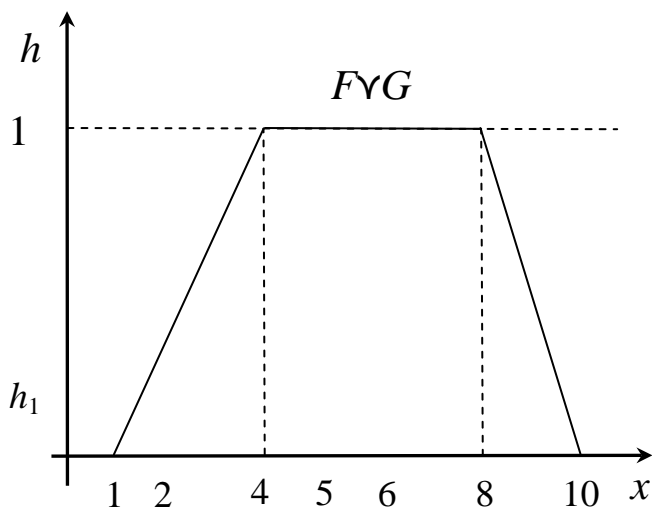
$$F(x=t)=\sigma_{\lambda}(T,F)=\int_0^1\sigma_{\square}(T_h,F_h)dh, \quad (9.9)$$

όπου $F \in F_1$ και $T = [t,t]$, $\forall h \in [0,1]$ είναι ένας **τετριμμένος ΑΔ**, ο οποίος αναπαριστάνει έναν πραγματικό αριθμό. Συγκεκριμένα, η Εξ.(9.9) συσχετίζει τις δύο διαφορετικές, αλλά ισοδύναμες, αναπαραστάσεις ενός ΑΔ που είναι η *αναπαράσταση-συνάρτησης-συμμετοχής* και η *αναπαράσταση-διαστημάτων* μέσω του βαθμού διάταξης $\sigma_{\lambda}: F_1 \times F_1 \rightarrow [0,1]$ στην περίπτωση που το πρώτο όρισμα της συνάρτησης $\sigma_{\lambda}(.,.)$ είναι ένας τετριμμένος ΑΔ $T = [t,t]$, $\forall h \in [0,1]$, ενώ το δεύτερο όρισμα της συνάρτησης $\sigma_{\lambda}(.,.)$ είναι ένας οποιοσδήποτε ΑΔ $F \in F_1$ με συνάρτηση συμμετοχής $F(x)$. Τότε, ο βαθμός διάταξης $\sigma_{\lambda}(T,F)$ ισούται με την τιμή της συνάρτησης $F(x)$ για $x=t$. Επιπλέον, η χρήση μιας συνάρτησης βαθμού διάταξης συνεπάγεται τρία σημαντικά πλεονεκτήματα όπως εξηγείται στη συνέχεια.

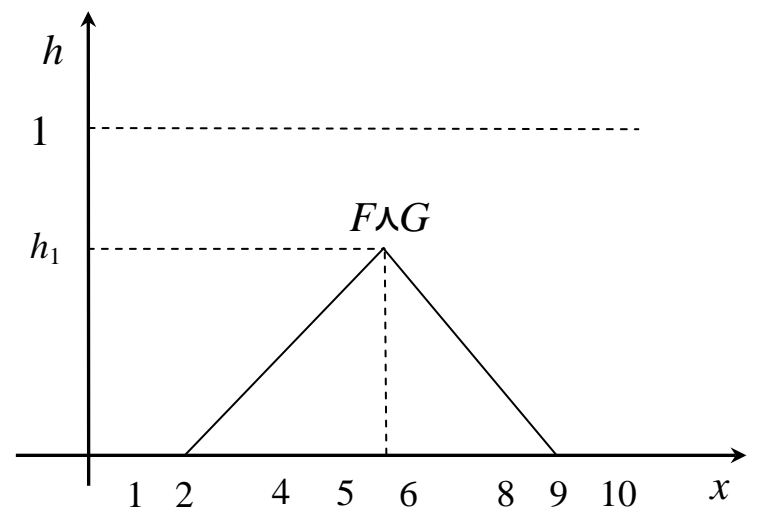
Πρώτον, η χρήση είτε της συνάρτησης $\sigma_{\lambda}(T,F)$ είτε της συνάρτησης $\sigma_{\nu}(T,F)$ συνεπάγεται την δυνατότητα χρήσης μη-τετριμμένων ΑΔ T προς αναπαράσταση της *αβεβαιότητας /αμφιβολίας*, δεύτερον, η χρήση της συνάρτησης βαθμού διάταξης $\sigma_{\nu}(T,F)$ έχει το επιπλέον πλεονέκτημα ότι είναι μη-μηδενική πέραν του στηρίγματος F_0 του ΑΔ F και, τρίτον, και οι δύο συναρτήσεις $\sigma_{\lambda}(.,.)$ και $\sigma_{\nu}(.,.)$ είναι παραμετρικές συνεπώς μπορούν να βελτιστοποιηθούν με εκτίμηση των παραμέτρων τους. Σε όλες τις (τρεις) προαναφερθείσες περιπτώσεις, χρησιμοποιώντας μια συνάρτηση (σ) βαθμού διάταξης, λαμβάνονται «*αποφάσεις αρχών*» υπό την έννοια ότι ικανοποιούνται οι ιδιότητες C1 και C2 στον ορισμό του βαθμού διάταξης.



(α)



(β)

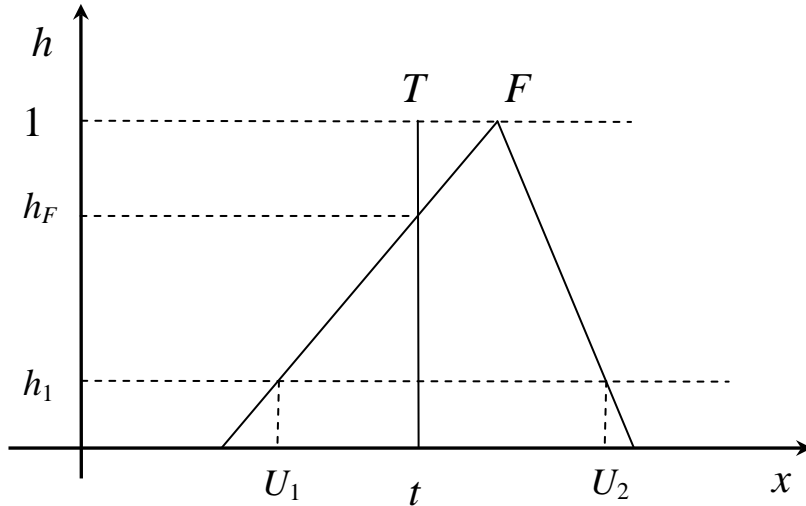


(γ)

Σχήμα 9.2 Υπολογισμός της συνένωσης (\vee) και της διατομής (\wedge) στο πλέγμα (F_1, ξ)

χρησιμοποιώντας αναπαραστάσεις συνάρτησης-συμμετοχής.

(α) Δύο ΑΔ Τ1 F και G . (β) Η συνένωση $F \vee G$. (γ) Η διατομή $F \wedge G$.



Σχήμα 9.3 Ένας οποιοσδήποτε ΑΔ $F \in \mathbf{F}_1$ και ένας τετριμμένος ΑΔ $T = [t, t], \forall h \in [0, 1]$ προς

$$\text{επεξήγηση της Εξ.(9.9) } F(x=t) = \sigma_\lambda(T, F) = \int_0^1 \sigma_\Pi(T_h, F_h) dh.$$

Το μαθηματικό αποτέλεσμα της Εξ.(9.9) θεωρείται κρίσιμο διότι, σε συνδυασμό με τους βαθμούς διάταξης $\sigma_\lambda(\cdot, \cdot)$ και $\sigma_\Pi(\cdot, \cdot)$ της ενότητας 9.1.6, θεμελιώνει τη χρήση οποιασδήποτε συνάρτησης $f: \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}$ στο πλαίσιο της διευρυμένης ΥΝ στη βάση της Λογικής (επιστήμης), και συγκεκριμένα στη βάση της *Συλλογιστικής Ασαφών Πλεγμάτων* (ΣΑΠ). Σημειωτέον ότι αν η συνάρτηση $f: \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}$ δεν είναι κυρτή τότε μπορεί (η συνάρτηση f) να προσεγγιστεί ικανοποιητικά με την υπέρθεση κυρτών συναρτήσεων, π.χ. συναρτήσεων Gaussian ή, ακόμα γενικότερα, κυρτών συναρτήσεων οποιουδήποτε σχήματος.

Υποθέτοντας ότι το ακόλουθο ολοκλήρωμα υπάρχει, μια μετρική συνάρτηση $D_1: \mathbf{F}_1 \times \mathbf{F}_1 \rightarrow \mathbf{R}_0^+$ μεταξύ ΑΔ T1 υπολογίζεται ως ακολούθως:

$$D_1(F, G) = \int_0^1 d_1(F_h, G_h) dh, \tag{9.10}$$

όπου η ολοκληρωτέα συνάρτηση $d_1: \mathbf{I}_1 \times \mathbf{I}_1 \rightarrow \mathbf{R}_0^+$ δίνεται από την Εξ.(9.1).

Το μέγεθος ενός ΑΔ T1, έστω F , με ύψος $hgt(F)$, είναι μια συνάρτηση $\Delta_1: \mathbf{F}_1 \rightarrow \mathbf{R}_0^+$, η οποία υπολογίζεται ως ακολούθως:

$$\Delta_1(F) = \int_0^{hgt(F)} \delta_1(F_h) p(h) dh, \quad (9.11)$$

όπου $\delta_1: I_{1p} \rightarrow \mathbf{R}_0^+$ είναι μια συνάρτηση *μεγέθους* ενός *συνηθισμένου διαστήματος T1* και $p(h)$ είναι μια *συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας* ορισμένη στο διάστημα $\Omega = [0,1]$, η οποία (συνάρτηση $p(h)$) εδώ έχει το ρόλο μιας *συνάρτησης βάρους*. Μια ειδική περίπτωση προκύπτει για $p(h) = 1, h \in [0,1]$. Σημειώστε ότι, συνήθως, το ύψος ενός $\Delta T1$ ισούται με 1, δηλ. $hgt(F) = 1$.

9.1.5 Επίπεδο-4: Το Πλέγμα (F_2, \leq) των Αριθμών Διαστημάτων Τύπου-2 (ΑΔ T2)

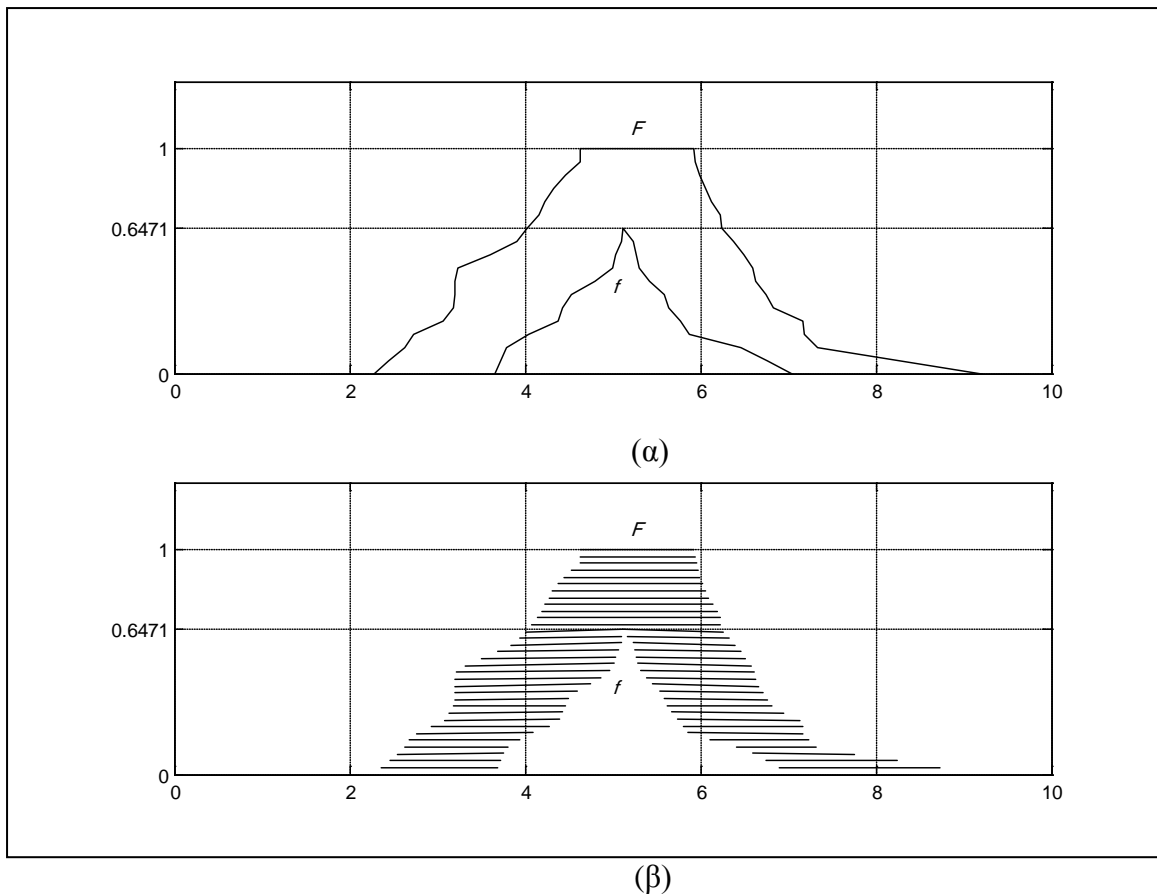
Ένας **Αριθμός Διαστημάτων (ΑΔ) Τύπου-2 (T2)**, ή $\Delta T2$ για συντομία, ορίζεται ως ένα διάστημα $\Delta T1$. Δηλαδή, ένας $\Delta T2$, εξ ορισμού, ισούται με $[U, W] \doteq \{X \in F_1: U \leq X \leq W\}$, όπου το U καλείται **κάτω ΑΔ**, ενώ το W καλείται **άνω ΑΔ** (του $\Delta T2 [U, W]$).

Το σύνολο των $\Delta T2$ είναι μερικώς διατεταγμένο, πλήρες πλέγμα, το οποίο συμβολίζεται ως (F_2, \leq) . Ένας $\Delta T2$ ερμηνεύεται ως *κόκκος πληροφορίας* [10].

Ένας $\Delta T2$ μπορεί, ισοδύναμα, να αναπαρασταθεί είτε με ένα σύνολο διαστημάτων $[U, W]_h, h \in [0,1]$, αυτή είναι η *αναπαράσταση-διαστημάτων*, είτε με δύο συναρτήσεις $U(x) = \bigvee_{h \in [0,1]} \{h: x \in U_h\}$ και $W(x) = \bigvee_{h \in [0,1]} \{h: x \in W_h\}$, αυτή είναι η *αναπαράσταση-συναρτήσεων-συμμετοχής*. Το Σχήμα 9.4 δείχνει τις δύο διαφορετικές, αλλά ισοδύναμες, αναπαραστάσεις ενός $\Delta T2$. Η διατομή (λ) και η συνένωση (γ) στο πλέγμα (F_2, \leq) δίνονται ως $(F \lambda G)_h = F_h \cap G_h$ και $(F \gamma G)_h = F_h \sqcup G_h$, αντίστοιχα, για $h \in [0,1]$. Για παράδειγμα, ο υπολογισμός της συνένωσης (γ) και της διατομής (λ) στο πλέγμα (F_2, \leq) δείχνονται στο Σχήμα 9.5 χρησιμοποιώντας αναπαραστάσεις συναρτήσεων-συμμετοχής. Συγκεκριμένα, το Σχήμα 9.5(α) δείχνει δύο $\Delta T2 [f, F]$ και $[g, G]$, όπου $f, F, g, G \in F_1$ έτσι ώστε $f \leq F$ και $g \leq G$. Η συνένωση $[f, F] \gamma [g, G] = [f \lambda g, F \gamma G]$ φαίνεται στο Σχήμα 9.5(β), όπου $(f \lambda g)_h = \emptyset$ για κάθε

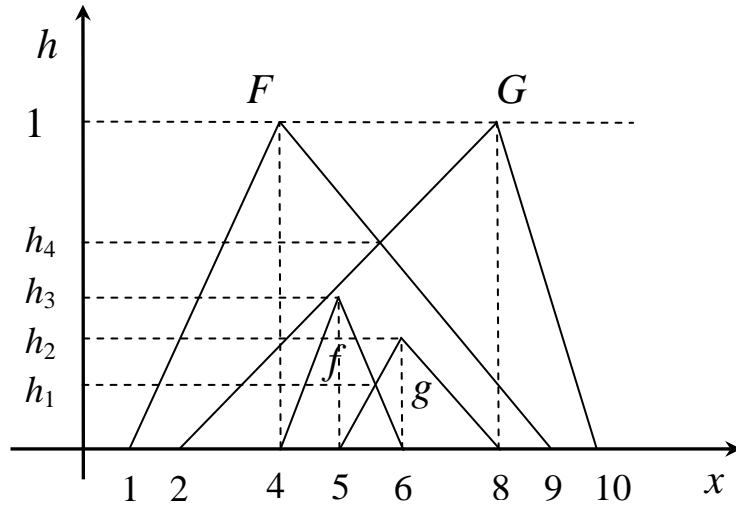
$h \in (h_1, 1]$. Το Σχήμα 9.5(γ) δείχνει την διατομή $[f, F] \wedge [g, G] = [f \vee g, F \wedge G]$, όπου $(f \vee g)_h = \emptyset$ για κάθε $h \in (h_3, 1]$ καθώς και $(F \wedge G)_h = \emptyset$ για κάθε $h \in (h_4, 1]$.

Μπορούμε να ορίσουμε δύο συναρτήσεις βαθμού διάταξης $\sigma_\lambda: F_2 \times F_2 \rightarrow [0, 1]$ και $\sigma_\gamma: F_2 \times F_2 \rightarrow [0, 1]$ χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις Εξ.(9.7) και Εξ.(9.8) στη βάση συναρτήσεων βαθμού διάταξης $\sigma_\pi: I_2 \times I_2 \rightarrow [0, 1]$ και $\sigma_\mu: I_2 \times I_2 \rightarrow [0, 1]$, οι τελευταίες δίνονται από τις εξισώσεις Εξ.(9.5) και Εξ.(9.6), αντίστοιχα.

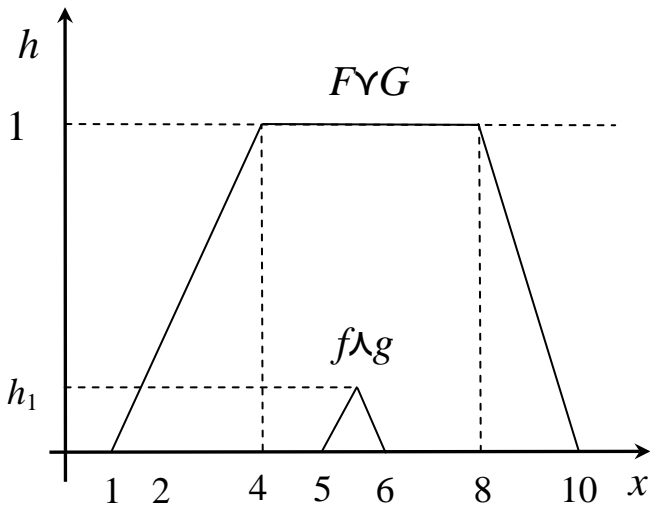


Σχήμα 9.4 Οι δύο ισοδύναμες αναπαραστάσεις ενός ΑΔ T2.

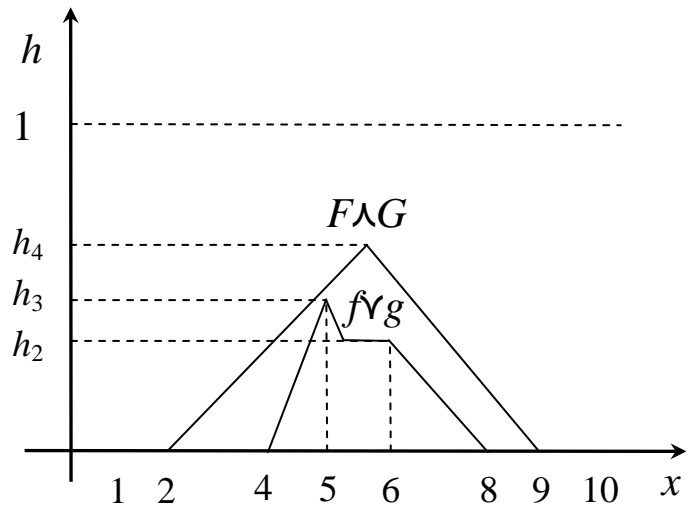
- (α) Η αναπαράσταση-συναρτήσεων-συμμετοχής, και
- (β) Η αναπαράσταση-διαστημάτων.



(α)



(β)



(γ)

Σχήμα 9.5 Υπολογισμός της συνένωσης (∨) και της διατομής (∧) στο πλέγμα (F_2, \leq)

χρησιμοποιώντας αναπαραστάσεις συναρτήσεων-συμμετοχής.

(α) Δύο ΑΔ T2 $[f, F]$ και $[g, G]$, όπου $f, F, g, G \in F_1$ έτσι ώστε $f \leq F$ και $g \leq G$.

(β) Η συνένωση $[f, F] \vee [g, G] = [f \wedge g, F \vee G]$.

(γ) Η διατομή $[f, F] \wedge [g, G] = [f \vee g, F \wedge G]$.

Υποθέτοντας ότι το ακόλουθο ολοκλήρωμα υπάρχει, μια μετρική συνάρτηση $D_2: F_2 \times F_2 \rightarrow R_0^+$ μεταξύ ΑΔ T2 υπολογίζεται ως ακολούθως:

$$D_2(F,G) = \int_0^1 d_2(F_h, G_h) dh \quad (9.12)$$

όπου η ολοκληρωτέα συνάρτηση $d_2: I_2 \times I_2 \rightarrow R_0^+$ δίνεται από την Εξ.(9.4).

Το μέγεθος ενός ΑΔ T2, έστω $F = [U, W]$, είναι μια συνάρτηση $\Delta_2: F_2 \rightarrow R_0^+$, η οποία υπολογίζεται ως ακολούθως:

$$\Delta_2(F) = \Delta_1(W) - \Delta_1(U), \quad (9.13)$$

όπου η συνάρτηση $\Delta_1: F_1 \rightarrow R_0^+$ υπολογίζει το μέγεθος ενός ΑΔ T1 με χρήση της Εξ.(9.11).

9.1.6 Επίπεδο-5: Πλέγματα N-άδων Αριθμών Διαστημάτων T1/T2

Θεωρείστε το Καρτεσιανό γινόμενο $G = G_1 \times \dots \times G_N$, όπου κάθε ένα από τα πλέγματα (G_i, \leq) , $i \in \{1, \dots, N\}$ ισούται με (F_i, \leq) . Δοθέντων δύο συναρτήσεων ${}^i v: L_i \rightarrow R_0^+$ και ${}^i \theta: L_i \rightarrow L_i$ στο αντίστοιχο πλέγμα (L_i, \leq) πραγματικών αριθμών όπως περιγράφεται στο Επίπεδο-0, έπεται μια συνάρτηση ${}^i v_1([a, b]) = {}^i v({}^i \theta(a)) + {}^i v(b)$ θετικής τιμοδότησης στο πλέγμα $(L_i \times L_i, \geq \times \leq)$ των γενικευμένων διαστημάτων και, τελικά, έπονται μετρικές συναρτήσεις καθώς και συναρτήσεις βαθμού διάταξης στο πλέγμα (G, Ξ) , όπως περιγράφεται παρακάτω. Συγκεκριμένα, μπορούμε να ορίσουμε συναρτήσεις βαθμού διάταξης με δύο διαφορετικούς τρόπους στο πλέγμα (G, Ξ) , όπως εξηγείται στη συνέχεια.

Πρώτον, για κάθε $h \in [0, 1]$ θεωρούμε N-διάστατα ορθογώνια παραλληλεπίπεδα στο πλήρες πλέγμα (I_1^N, Ξ) . Έτσι, προκύπτουν [11]

$$\sigma_{\cup}(\mathbf{F}, \mathbf{E}) = \int_0^1 \frac{\sum_{i=1}^N i v_1((E_i)_h)}{\sum_{i=1}^N i v_1((F_i \cup E_i)_h)} dh, \text{ και} \quad (9.14)$$

$$\sigma_{\cap}(\mathbf{F}, \mathbf{E}) = \int_0^1 \frac{\sum_{i=1}^N i v_1((F_i \cap E_i)_h)}{\sum_{i=1}^N i v_1((F_i)_h)} dh. \quad (9.15)$$

Δεύτερον, θεωρούμε ξεχωριστά την κάθε διάσταση στο πλέγμα (\mathbf{F}_1^N, Ξ) . Συνεπώς, σε κάθε διάσταση $i \in \{1, \dots, N\}$ μπορεί να οριστεί ένας βαθμός διάταξης $\sigma_i: \mathbf{F}_1 \times \mathbf{F}_1 \rightarrow [0, 1]$ σύμφωνα είτε με την Εξ.(9.7) είτε με την Εξ.(9.8). Τελικά, ένας βαθμός διάταξης $\sigma_c: \mathbf{F}^N \times \mathbf{F}^N \rightarrow [0, 1]$ στο πλέγμα (\mathbf{F}^N, Ξ) μπορεί να οριστεί με τον *κυρτό συνδυασμό* $\sigma_c(\mathbf{F} = (F_1, \dots, F_N), \mathbf{E} = (E_1, \dots, E_N)) = \lambda_1 \sigma_1(F_1, E_1) + \dots + \lambda_N \sigma_N(F_N, E_N)$, όπου $\lambda_1, \dots, \lambda_N \geq 0$ έτσι ώστε $\lambda_1 + \dots + \lambda_N = 1$. Δύο άλλοι βαθμοί διάταξης δίνονται από τους τύπους (α) $\sigma_{\wedge}(\mathbf{F} = (F_1, \dots, F_N), \mathbf{E} = (E_1, \dots, E_N)) = \min_{i \in \{1, \dots, N\}} \sigma_i(F_i, E_i)$ και (β) $\sigma_{\Pi}(\mathbf{F} = (F_1, \dots, F_N), \mathbf{E} = (E_1, \dots, E_N)) = \prod_{i=1}^N \sigma_i(F_i, E_i)$, αντίστοιχα [8]. Με λόγια, ο βαθμός διάταξης $\sigma_{\wedge}(\mathbf{F} = (F_1, \dots, F_N), \mathbf{E} = (E_1, \dots, E_N))$ ισούται με τον ελάχιστο των βαθμών διάταξης $\sigma_i(F_i, E_i)$, $i \in \{1, \dots, N\}$, ενώ ο βαθμός διάταξης $\sigma_{\Pi}(\mathbf{F} = (F_1, \dots, F_N), \mathbf{E} = (E_1, \dots, E_N))$ ισούται με το γινόμενο των βαθμών διάταξης $\sigma_i(F_i, E_i)$, $i \in \{1, \dots, N\}$.

Επιπλέον, *μετρικές* συναρτήσεις $D: \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{R}_0^+$ στο πλέγμα (\mathbf{G}, Ξ) υπολογίζονται ως ακολούθως.

$$D(\mathbf{F} = (F_1, \dots, F_N), \mathbf{E} = (E_1, \dots, E_N)) = \left[(D_1(F_1, E_1))^p + \dots + (D_1(F_N, E_N))^p \right]^{1/p}, \quad (9.16)$$

όπου $p \in \mathbf{R}$, ενώ η μετρική $D_1: \mathbf{F}_1 \times \mathbf{F}_1 \rightarrow \mathbf{R}_0^+$ υπολογίζεται με την Εξ.(9.10).

Το μέγεθος ενός N-διάστατου ΑΔ Τ1 $A = (A_1, \dots, A_N)$ υπολογίζεται από τον *κυρτό συνδυασμό*

$$\Delta(A) = p_1 \Delta_1(A_1) + \dots + p_N \Delta_1(A_N) \quad (9.17)$$

ως μια ειδική εφαρμογή του γενικού ορισμού της συνάρτησης *μεγέθους* σε μδσυν (βλ. στο Κεφάλαιο 7) με $\Omega = \{1, \dots, N\}$. Επιπλέον, σημειώστε ότι η συνάρτηση $\Delta_1: \mathbf{F}_1 \rightarrow \mathbf{R}_0^+$ στην

Εξ.(9.17) υπολογίζεται, σύμφωνα με την Εξ.(9.11), ως μια άλλη ειδική εφαρμογή του προαναφερθέντος γενικού ορισμού της συνάρτησης *μεγέθους*, με $\Omega = [0,1]$.

Όλες οι συναρτήσεις σ αυτήν την ενότητα επεκτείνονται εύκολα σε N-διάστατα ΑΔ T2.

9.1.7 Περαιτέρω Επεκτάσεις

Στην προαναφερθείσα ιεραρχία μπορούμε να εισάγουμε τουλάχιστον ένα, επιπλέον, επίπεδο γενικεύοντας κάποιον ΑΔ T1/T2 όπως περιγράφεται στη συνέχεια. Συγκεκριμένα, ένας ΑΔ T1/T2 έχει διδιάστατη (2-Δ) αναπαράσταση στο επίπεδο, η οποία μπορεί να γενικευτεί στις τρεις διαστάσεις (3-Δ) όπως εξηγείται στη συνέχεια [12].

Ένας 3-Δ ΑΔ T1 (αντίστοιχα, T2) ορίζεται ως μια συνάρτηση $F: [0,1] \rightarrow F$, όπου $F = F_1$ (αντίστοιχα, $F = F_2$), η οποία ικανοποιεί την σχέση $z_1 \leq z_2 \Rightarrow F_{z_1} \succeq F_{z_2}$. Με άλλα λόγια, ένας 3-Δ ΑΔ T1 (αντίστοιχα, T2) F έχει μια τρισδιάστατη αναπαράσταση F_z έτσι ώστε για σταθερό $z = z_0$ η συνάρτηση F_{z_0} , η οποία ονομάζεται **ζ-Φέτα**, είναι ένας 2-Δ ΑΔ T1 (αντίστοιχα, T2). Για παράδειγμα, το Σχήμα 9.6(α) δείχνει έναν 3-Δ ΑΔ T2 F_z , $z \in [0,1]$, ο οποίος τέμνεται από το επίπεδο $z = 0.5$. Η ζ-Φέτα $F_{0.5}$ είναι ένας 2-Δ ΑΤ T2, ο οποίος δείχνεται στο Σχήμα 9.6(β).

Έστω ότι F_g συμβολίζει είτε το σύνολο των 3-Δ ΑΔ T1 είτε το σύνολο των 3-Δ ΑΔ T2. Σε κάθε περίπτωση, η δυάδα (F_g, \preceq) είναι πλέγμα με διάταξη $E \Xi F \Leftrightarrow E_z \preceq F_z$, για κάθε $z \in [0,1]$.

Μια συνάρτηση $\sigma_{F_g} : F_g \times F_g \rightarrow [0,1]$ βαθμού διάταξης στο πλέγμα (F_g, \preceq) δίνεται ως

$$\sigma_{F_g}(E, F) = \int_0^1 \int_0^1 \sigma_1((E_z)_h, (F_z)_h) dh dz, \quad (9.18)$$

όπου η συνάρτηση $\sigma_1(\dots)$ δίνεται από μια εκ των εξισώσεων (9.2), (9.3), (9.5), (9.6).

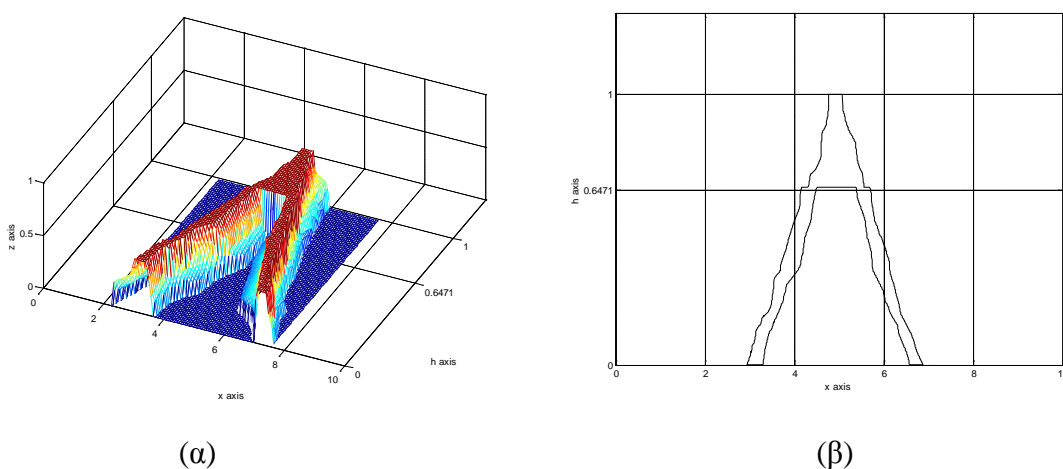
9.2 Αριθμοί Διαστημάτων (ΑΔ)

Αυτή η ενότητα εστιάζει στους Αριθμούς Διαστημάτων Τύπου-1, ή ΑΔ (T1) για συντομία.

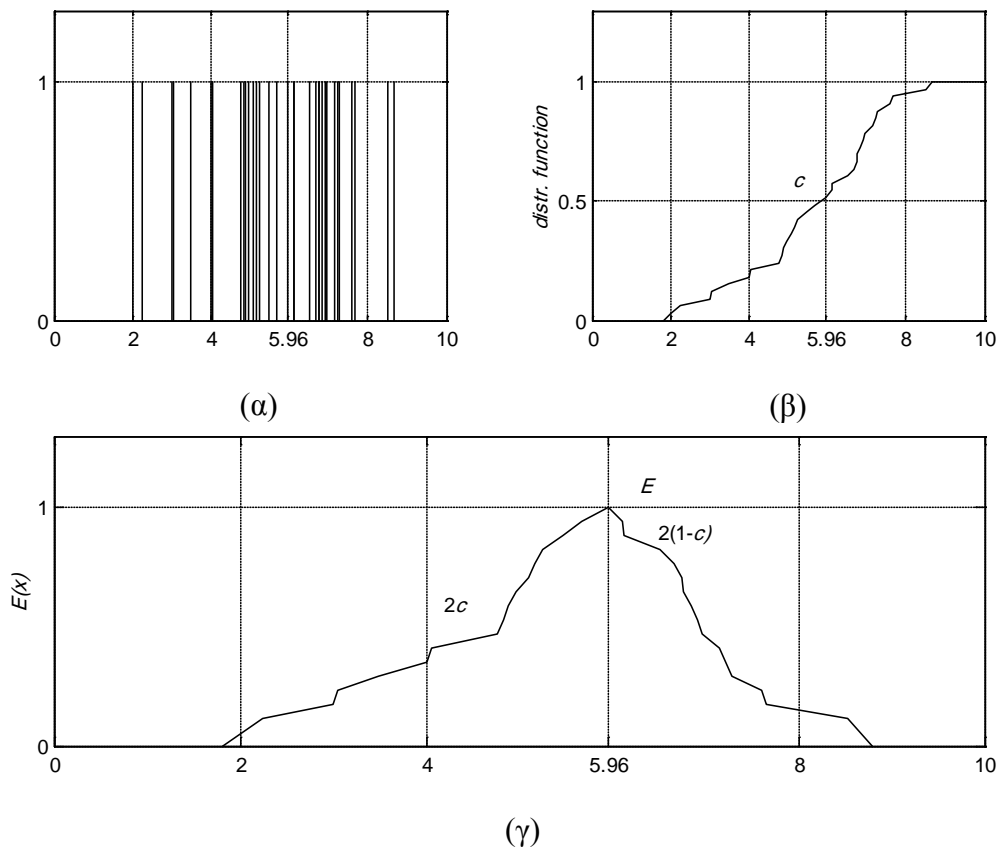
9.2.1 Ερμηνείες ΑΔ

Διάφοροι συσχετισμοί έχουν προταθεί στην βιβλιογραφία μεταξύ (κατανομής) εφικτότητας και (κατανομής) πιθανότητας [21], [27]. Σ' αυτό το βιβλίο ένας ΑΔ αποτελεί ένα «μαθηματικό αντικείμενο» που μπορεί να ερμηνευτεί με δύο, τουλάχιστον, διαφορετικούς τρόπους. Συγκεκριμένα, πρώτο γ ένας ΑΔ μπορεί να ερμηνευτεί ως ασαφής αριθμός ο οποίος αναπαριστάνει μια κατανομή εφικτότητας και, δεύτερον, ένας ΑΔ μπορεί να ερμηνευτεί ως κατανομή πιθανότητας όπως εξηγείται στη συνέχεια.

Έστω μια κατανομή πιθανότητας σύμφωνα με την οποία επιλέγουμε τον πληθυσμό των δειγμάτων (βλ. πραγματικών αριθμών) που φαίνονται στο Σχήμα 9.7(α). Έστω $M=5.96$ η τιμή του **διάμεσου** του δείγματος, δηλ. εκείνης της τιμής που χωρίζει το σύνολο των τιμών του δείγματος σε δυο ίσα μέρη. Το Σχήμα 9.7(β) δείχνει την αντίστοιχη, γνησίως αύξουσα **συνάρτηση αθροιστικής κατανομής** $c(\cdot)$ με $c(5.96)=0.5$. Το Σχήμα 9.7(γ) δείχνει τον υπολογισμό ενός ΑΔ E με τον εξής τρόπο: Για κάθε $x \leq M=5.96$ υπολογίζεται η συνάρτηση $2c(x)$, ενώ για κάθε $x > M=5.96$ υπολογίζεται η συνάρτηση $2(1-c(x))$. Ο προαναφερθείς αλγόριθμος ονομάζεται «CALCIN» και υπολογίζει τον ΑΔ E που φαίνεται στο Σχήμα 9.7(γ) με **αναπαράσταση-συνάρτησης-συμμετοχής** $E(x)$, η οποία ερμηνεύεται ως μια κατανομή πιθανότητας. Συγκεκριμένα, αν F είναι ένας ΑΔ, ο οποίος υπολογίστηκε με τον αλγόριθμο CALCIN τότε το διάστημα $F(h)$ περιλαμβάνει το $100(1-h)\%$ της κατανομής, ενώ το υπόλοιπο $100h\%$ κατανέμεται εξίσου κάτω- και επάνω- από το $F(h)$ [5], [6], [9], [10], [20].



Σχήμα 9.6 (α) Ένας τρισδιάστατος Αριθμός Διαστημάτων Τύπου-2 (3-Δ ΑΔ T2), έστω F .
(β) Η ζ-Φέτα $F_{0.5}$ (του 3-Δ ΑΔ T2 F) είναι ο 2-Δ ΑΔ T2 του σχήματος.



Σχήμα 9.7 (α) Μια κατανομή δειγμάτων, βλ. πραγματικών αριθμών, στο διάστημα $[0, 10]$, με τιμή *διάμεσου* $M= 5.96$.
 (β) Η αντίστοιχη *συνάρτηση αθροιστικής κατανομής* $c(\cdot)$.
 (γ) Υπολογισμός του ΑΔ E από την *συνάρτηση κατανομής* $c(\cdot)$ σύμφωνα με τον αλγόριθμο CALCIN.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον έχει ένας ΑΔ της μορφής $[a,b]$, για κάθε $h \in [0,1]$, ο οποίος αναπαριστάει το διάστημα $[a,b]$ πραγματικών αριθμών. Έτσι, στις N διαστάσεις έτσι προκύπτει ο χώρος των **ορθογώνιων παραλληλεπίπεδων** [6], ο οποίος (χώρος) έχει τραβήξει το ερευνητικό ενδιαφέρον [3], [16], [22], [23], χάρη στην απλότητα και την αποτελεσματικότητά του σε υπολογιστικές εφαρμογές. Σημειώστε επίσης ότι η *συνάρτηση βαθμός διάταξης* είχε αρχικά παρουσιαστεί με το όνομα **μέτρο εγκλεισμού** διότι χρησιμοποιούνταν μόνο με ορθογώνια παραλληλεπίπεδα αντί για τους πιο γενικούς N -διάστατους ΑΔ. Αργότερα επεκτάθηκε σε γενικά πλέγματα, οπότε το αρχικό όνομα (βλ. μέτρο εγκλεισμού) άλλαξε σε *βαθμό διάταξης*.

9.2.2 Αναπαράσταση AD

Από πρακτική άποψη, ένας AD F αναπαριστάται στη μνήμη του υπολογιστή με ένα $L \times 2$ πίνακα $[a_1 \ b_1; a_2 \ b_2; \dots; a_L \ b_L]$ πραγματικών αριθμών, όπου L είναι ο προκαθορισμένος από το χρήστη, αριθμός επιπέδων h_1, h_2, \dots, h_L έτσι ώστε $0 < h_1 \leq h_2 \leq \dots \leq h_L = 1$. Στην πράξη συνήθως χρησιμοποιούμε $L=16$, ή $L=32$, επίπεδα ανά ίσα διαστήματα στο διάστημα $[0,1]$. Σημειώστε ότι ένας αριθμός 16, ή 32, επιπέδων έχει επίσης προταθεί σε εφαρμογές ασαφών συστημάτων συμπερασμού (FIS) που βασίζονται σε α -διατομές ασαφών αριθμών [8], [25], [26].

Σε συνέχεια των παραπάνω παραδοχών, ένας 2- Δ AD $T2$, έστω $[U,W]$, αναπαριστάται με έναν $L \times 4$ πίνακα διότι για κάθε ένα από τα “ L ” επίπεδα κατά μήκος του άξονα h αποθηκεύουμε δύο διαστήματα: Ένα διάστημα για τον κάτω AD U , και ένα διάστημα για τον άνω AD W . Τέλος, ένας 3- Δ AD $T2$ αναπαριστάται με έναν $L \times 4 \times L$ πίνακα διότι για κάθε ένα από τα “ L ” επίπεδα κατά μήκος του άξονα z αποθηκεύουμε έναν 2- Δ AD $T2$.

9.2.3 Υπολογισμοί με AD

Διάφορες αριθμητικές ασαφών αριθμών έχουν προταθεί στην βιβλιογραφία, κάποιες από τις οποίες βασίζονται σε **αριθμητικές διαστημάτων** [15], [19]. Σ’ αυτήν την ενότητα παρουσιάζεται μια νέα αριθμητική στον χώρο των AD , η οποία βασίζεται σε μια νέα αριθμητική διαστημάτων με λιγότερους αλγεβρικούς περιορισμούς για μεγαλύτερη υπολογιστική ευελιξία όπως εξηγείται στη συνέχεια.

Έστω το πλήρες πλέγμα ($L=[-\infty, +\infty], \leq$) των πραγματικών αριθμών. Το πλέγμα ($L \times L, \geq \times \leq$) των γενικευμένων διαστημάτων είναι ένας **γραμμικός χώρος** [20] διότι μπορεί να οριστεί μια πράξη πρόσθεσης καθώς και μια πράξη πολλαπλασιασμού όπως εξηγείται στη συνέχεια.

Η πράξη της πρόσθεσης μεταξύ γενικευμένων διαστημάτων ορίζεται ως ακολούθως

$$[a,b] + [c,e] = [a+c, b+e].$$

Ενώ η πράξη του πολλαπλασιασμού ενός γενικευμένου διαστήματος και ενός πραγματικού αριθμού ορίζεται ως ακολούθως

$$k[a,b] = [ka, kb].$$

Η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός μπορούν να επεκταθούν στο σύνολο \mathbf{G} των ΓΑΔ. Συγκεκριμένα, αν $F, H \in \mathbf{G}$ τότε η πρόσθεση ορίζεται ως $F+H = F_h+H_h$, όπου $h \in [0,1]$, ενώ ο πολλαπλασιασμός ενός ΓΑΔ επί έναν πραγματικό αριθμό k ορίζεται ως $kF = kF_h$, όπου $h \in [0,1]$. Έπεται ότι το πλέγμα (\mathbf{G}, Ξ) των ΓΑΔ είναι ένας γραμμικός χώρος.

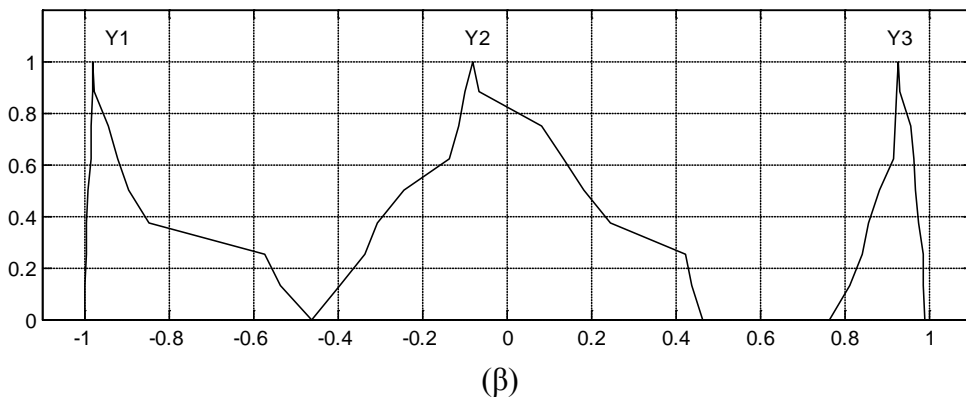
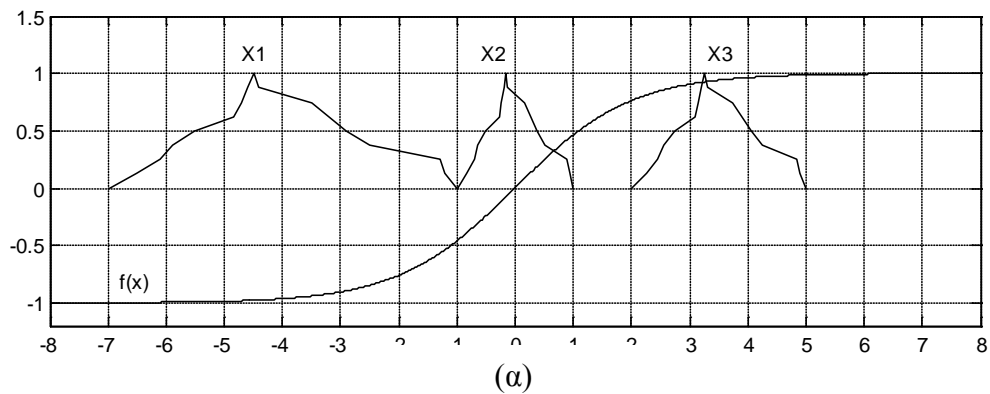
Είναι ενδιαφέρον ότι $[a,b],[c,e] \in I_1$ συνεπάγεται ότι $[a+c, b+e] \in I_1$. Ωστόσο, δοθέντος ενός διαστήματος $T1 [a,b] \in I_1$ και ενός πραγματικού αριθμού $k \in \mathbf{R}$, δεν υπάρχει εγγύηση ότι το γινόμενο $k[a,b]$ θα είναι ένα διάστημα $T1$. Συγκεκριμένα, για αρνητικό αριθμό $k < 0$, το γινόμενο $k[a,b]$ δεν είναι διάστημα $T1$ όταν $ka > kb$.

Στο προαναφερθέν πλαίσιο, έχειδειχθεί ότι το σύνολο των διαστημάτων $T1$ είναι ένας κώνος στον γραμμικό χώρο των γενικευμένων διαστημάτων. Υπενθυμίζεται ότι, εξ ορισμού, **κώνος** καλείται ένα υποσύνολο C γραμμικού χώρου αν και μόνον αν για $x_1, x_2 \in C$ και για μη-αρνητικούς αριθμούς $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$, ο γραμμικός συνδυασμός $(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)$ ανήκει στο C . Με βάση τα παραπάνω συνεπάγεται ότι το σύνολο των διαστημάτων $T1$ είναι κώνος στο γραμμικό χώρο των γενικευμένων διαστημάτων $T1$.

Επεκτάσεις μπορούν να γίνουν και στον χώρο F_1 των ΑΔ. Συγκεκριμένα, η πρόσθεση δύο ΑΔ F και G μπορεί να οριστεί ως $(F + G) = F_h + G_h$, όπου $h \in [0,1]$, ενώ ο πολλαπλασιασμός ενός ΑΔ F επί έναν πραγματικό αριθμό k μπορεί να οριστεί ως $kF = kF_h$, όπου $h \in [0,1]$. Παρόμοια, όπως προηγουμένως, έπεται ότι ο χώρος F_1 των ΑΔ είναι κώνος στον γραμμικό χώρο των ΓΑΔ [20].

Μπορούμε να εισάγουμε έναν μη-γραμμικό μετασχηματισμό [14] στον χώρο των διαστημάτων $T1$ θεωρώντας μια *γνησίως αύξουσα πραγματική συνάρτηση* $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$. Συγκεκριμένα, ένα διάστημα $T1 [a,b]$ μετασχηματίζεται στο διάστημα $T1 [f(a), f(b)]$. Επεκτάσεις μπορούν να γίνουν και στον χώρο F_1 των ΑΔ, όπου δοθείσης μιας γνησίως αύξουσας πραγματικής συνάρτησης $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, ένας ΑΔ μετασχηματίζεται σε έναν άλλον ΑΔ ως ακολούθως $[f(F)]_h = f(F_h)$, $h \in [0,1]$. Για παράδειγμα, το Σχήμα 9.8(α) απεικονίζει μια γνησίως αύξουσα συνάρτηση, αυτή είναι η σιγμοειδής συνάρτηση $f(x) = (1-e^{-x})/(1+e^{-x})$, η οποία μετασχηματίζει τους ΑΔ $X1, X2$ και $X3$ του Σχήματος 9.8(α) στους $Y1 = f(X1), Y2 = f(X2)$ και $Y3 = f(X3)$, αντίστοιχα, του Σχήματος 9.8(β).

Όταν επιλέξουμε, σε μια συγκεκριμένη εφαρμογή, να ερμηνεύσουμε κάθε ΑΔ ως μια κατανομή πιθανότητας τότε όλοι οι προαναφερθέντες (μη-γραμμικοί) μετασχηματισμοί και πράξεις μεταξύ ΑΔ μπορούν να τελούνται μεταξύ πληθυσμών μετρήσεων μέσω αλγορίθμων παλινδρόμησης όπως εξηγείται παρακάτω.



Σχήμα 9.8 (α) Η σιγμοειδής συνάρτηση $f(x) = (1-e^{-x})/(1+e^{-x})$ και τρεις ΑΔ X_1 , X_2 και X_3 .
 (β) Το πεδίο ορισμού $[0,1]$ των εικόνων $Y_1=f(X_1)$, $Y_2=f(X_2)$ και $Y_3=f(X_3)$ εξ ορισμού ισούται με το πεδίο τιμών $[0,1]$ της σιγμοειδούς $f(x) = (1-e^{-x})/(1+e^{-x})$.

Το επόμενο υπολογιστικό παράδειγμα ερμηνεύει γεωμετρικά, στο επίπεδο, την *ιδιότητα της Συνέπειας (C2)* (βλ. στον ορισμό του βαθμού διάταξης) στο Καρτεσιανό γινόμενο $([0,1],\leq)\times([0,1],\leq)$, όπως φαίνεται στο Σχήμα 9.9 (α) και (β), με ίδιες συναρτήσεις $v(x)=x$ και $\theta(x)=1-x$ ανά βασικό πλέγμα $([0,1],\leq)$. Επιπλέον, το Σχήμα 9.9 (α) και (β) δείχνει δύο «κουτιά» $u=[0.5,0.6]\times[0.3,0.4]$ και $w=[0.4,0.9]\times[0.2,0.8]$ με $u\sqsubseteq w$. Σημειώστε ότι το Σχήμα 9.9(α), πέραν των u και w , δείχνει το «κουτί» $x=[0.15,0.2]\times[0.15,0.2]$, το οποίο κείται εκτός των u και w . Ενώ, εκτός από τα u και w , το Σχήμα 9.9(β) δείχνει το «κουτί» $x'=[0.85,0.9]\times[0.55,0.6]$, το οποίο κείται εκτός του u , αλλά εντός του w .

Είναι εύκολη η επαλήθευση των υπολογισμών $x\sqcup u=[0.15,0.6]\times[0.15,0.4]$ και $x\sqcup w=[0.15,0.9]\times[0.15,0.8]$, καθώς και των υπολογισμών $x'\sqcup u=[0.5,0.9]\times[0.3,0.6]$ και $x'\sqcup w=w$.

Στη συνέχεια, υπολογίζουμε βαθμούς διάταξης $\sigma_{\sqcup}(\cdot,\cdot)$. Συγκεκριμένα, προκύπτει $\sigma_{\sqcup}(x,u)=$

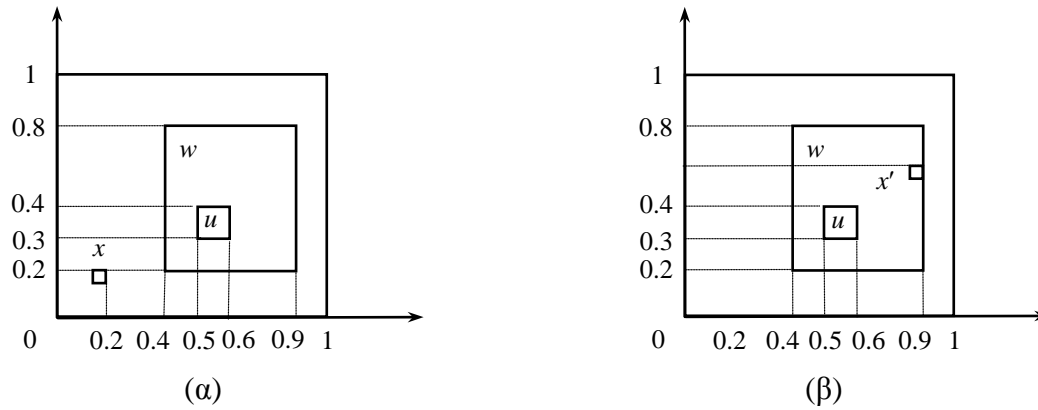
$$\frac{V(u)}{V(x\sqcup u)} = \frac{v(\theta(0.5)) + v(0.6) + v(\theta(0.3)) + v(0.4)}{v(\theta(0.15)) + v(0.6) + v(\theta(0.15)) + v(0.4)} = \frac{2.2}{2.7} \approx 0.8148 \text{ και } \sigma_{\sqcup}(x,w) = \frac{3.1}{3.4} \approx$$

0.9118. Συνεπώς, επαληθεύεται η ανισότητα $\sigma_{\sqcup}(x,u)\leq\sigma_{\sqcup}(x,w)$ στο Σχήμα 9.9(α). Επίσης,

$$\text{προκύπτει } \sigma_{\sqcup}(x',u) = \frac{V(u)}{V(x'\sqcup u)} = \frac{v(\theta(0.5)) + v(0.6) + v(\theta(0.3)) + v(0.4)}{v(\theta(0.5)) + v(0.9) + v(\theta(0.3)) + v(0.6)} = \frac{2.2}{2.7} \approx 0.8148 \text{ και}$$

$\sigma_{\sqcup}(x',w)=1$. Συνεπώς, επαληθεύεται η ανισότητα $\sigma_{\sqcup}(x',u)\leq\sigma_{\sqcup}(x',w)$ στο Σχήμα 9.9(β).

Σε συνέχεια των υπολογισμών, παρατηρείστε ότι σε κάποιες εφαρμογές είναι δυνατόν να εμφανίζονται «ελλιπή δεδομένα» ή/και «αδιάφορα δεδομένα» σε κάποιο βασικό πλέγμα, όπου λέγοντας «ελλιπές δεδομένο» εννοούμε την απουσία μιας συγκεκριμένης τιμής σε κάποιο βασικό πλέγμα, ενώ λέγοντας «αδιάφορο δεδομένο» εννοούμε την παρουσία όλων των δυνατών τιμών σε κάποιο βασικό πλέγμα. Για έναν ουσιαστικό τρόπο χειρισμού των προαναφερθέντων δεδομένων αναπαριστάνουμε (α) ένα «ελλιπές δεδομένο» με το ελάχιστο στοιχείο $[i,o]$, και (β) ένα «αδιάφορο δεδομένο» με το μέγιστο στοιχείο $[o,i]$ στο αντίστοιχο βασικό πλέγμα $(L=[o,i],\leq)$. Στη συνέχεια παρουσιάζεται ο χειρισμός «ελλιπών δεδομένων» ή/και «αδιάφορων δεδομένων» επαληθεύοντας την *ιδιότητα της Συνέπειας (C2)*.



Σχήμα 9.9 (α) και (β): Η ιδιότητα της Συνέπειας « $u \sqsubseteq w \Rightarrow \sigma(x, u) \leq \sigma(x, w)$ » εγγυάται ότι όταν ένα κουτί u είναι εντός ενός άλλου w τότε κάθε κουτί x (ή x') περιέχεται, με την έννοια ενός βαθμού διάταξης, περισσότερο στο w παρά στο u .

Έστω το Καρτεσιανό γινόμενο $([0,1], \leq) \times ([0,1], \leq)$ δύο βασικών πλεγμάτων $([0,1], \leq)$ με ίδιες συναρτήσεις $v(x) = x$ και $\theta(x) = 1 - x$ ανά βασικό πλέγμα όπως φαίνεται στο Σχήμα 9.10 (α) και (β). Επιπλέον, το Σχήμα 9.10 (α) και (β) δείχνει δύο «κουτιά» $u = [0.6, 0.7] \times [0.5, 0.6]$ και $w = [0.5, 0.9] \times [0.4, 0.8]$ με $u \sqsubseteq w$. Το Σχήμα 9.10(α) δείχνει το δεδομένο $x_m = [0.3, 0.3] \times [1, 0]$ με «ελλiptές δεδομένο» στο δεύτερο βασικό πλέγμα, ενώ το Σχήμα 9.10(β) δείχνει το δεδομένο $x_d = [0.3, 0.3] \times [0, 1]$ με «αδιάφορο δεδομένο» στο δεύτερο βασικό πλέγμα.

Είναι εύκολη η επαλήθευση των υπολογισμών $x_m \sqcup u = [0.3, 0.7] \times [0.5, 0.6]$, $x_m \sqcup w = [0.3, 0.9] \times [0.4, 0.8]$, $x_d \sqcup u = [0.3, 0.7] \times [0, 1]$ και $x_d \sqcup w = [0.3, 0.9] \times [0, 1]$. Στη συνέχεια,

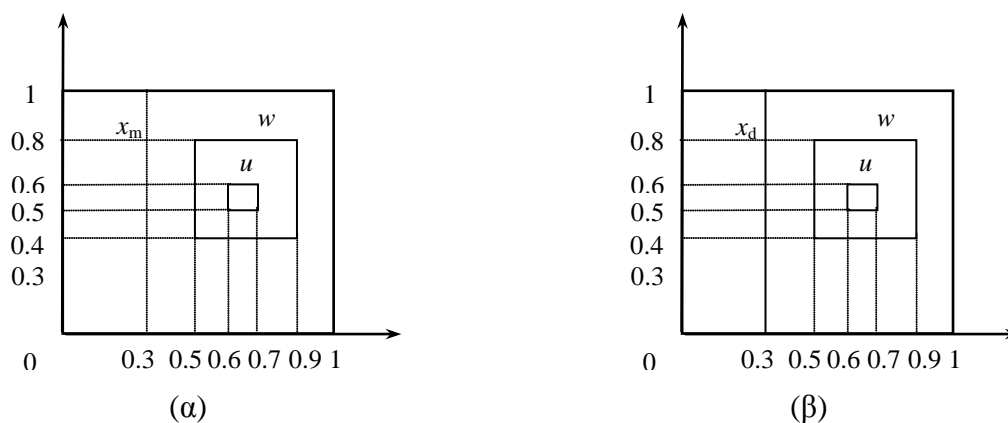
υπολογίζουμε βαθμούς διάταξης $\sigma_u(\cdot, \cdot)$. Συγκεκριμένα, προκύπτει $\sigma_u(x_m, u) = \frac{V(u)}{V(x_m \sqcup u)} =$

$$\frac{v(\theta(0.6)) + v(0.7) + v(\theta(0.5)) + v(0.6)}{v(\theta(0.3)) + v(0.7) + v(\theta(0.5)) + v(0.6)} = \frac{2.2}{2.5} \approx 0.8800 \text{ και } \sigma_u(x_m, w) = \frac{2.8}{3.0} \approx 0.9333. \text{ Συνεπώς,}$$

επαληθεύεται η ανισότητα $\sigma_u(x_m, u) \leq \sigma_u(x_m, w)$ στο Σχήμα 9.10(α). Επίσης, προκύπτει

$$\sigma_u(x_d, u) = \frac{V(u)}{V(x_d \sqcup u)} = \frac{v(\theta(0.6)) + v(0.7) + v(\theta(0.5)) + v(0.6)}{v(\theta(0.3)) + v(0.7) + v(\theta(0)) + v(1)} = \frac{2.2}{3.4} \approx 0.6471 \text{ και } \sigma_u(x_d, w) =$$

$\frac{2.8}{3.6} \approx 0.7778$. Συνεπώς, επαληθεύεται η ανισότητα $\sigma_u(x_d, u) \leq \sigma_u(x_d, w)$ στο Σχήμα 9.10(β).



Σχήμα 9.10 Η ιδιότητα της Συνέπειας « $u \subseteq w \Rightarrow \sigma(x, u) \leq \sigma(x, w)$ » ισχύει με «ελλiptή δεδομένα» ή/και με «αδιάφορα δεδομένα».

(α) «Ελλiptές δεδομένο» κατά μήκος του κατακόρυφου άξονα, συγκεκριμένα είναι $x_m = [0.3, 0.3] \times [1, 0]$.

(β) «Αδιάφορο δεδομένο» κατά μήκος του κατακόρυφου άξονα, συγκεκριμένα είναι $x_d = [0.3, 0.3] \times [0, 1]$.

9.3 Αλγόριθμοι Εφαρμογής ΑΔ

Αλγόριθμοι που υπολογίζουν με ΑΔ έχουν ήδη προταθεί στη βιβλιογραφία είτε για μηχανική μάθηση είτε για παλινδρόμηση όπως εξηγείται στη συνέχεια.

9.3.1 Αλγόριθμοι Μηχανικής Μάθησης

Θυμηθείτε ότι κάθε χρήση μιας συνάρτησης βαθμού διάταξης (σ) ονομάζεται *Συλλογιστική Ασαφών Πλεγμάτων* (ΣΑΠ) [8]. Στη συνέχεια παρουσιάζονται τρεις αλγόριθμοι ΣΑΠ σε ψευδο-κώδικα, όπου ο πρώτος αλγόριθμος είναι για ομαδοποίηση (Σχήμα 9.11), ο δεύτερος αλγόριθμος είναι για ταξινόμηση (Σχήμα 9.12), ενώ ο τρίτος αλγόριθμος είναι για αναγνώριση (Σχήμα 9.13), όλοι στον χώρο F_1^N των ΑΔ. Σημειώστε ότι οι προαναφερθέντες αλγόριθμοι αποτελούν γενικεύσεις αντίστοιχων αλγόριθμων της *Θεωρίας Προσαρμοστικού Συντονισμού* από τον N -διάστατο Ευκλείδειο χώρο R^N στον χώρο F_1^N των N -άδων ΑΔ.

Η αναγνώριση προτύπων [4] είναι μια περιοχή ενεργού ενδιαφέροντος στην βιβλιογραφία. Παρατηρείστε ότι οι παραπάνω αλγόριθμοι, ή/και παραλλαγές των προαναφερθέντων αλγόριθμων, έχουν ήδη χρησιμοποιηθεί εκτεταμένα σε προβλήματα αναγνώρισης προτύπων

[5], [11], [13]. Μάλιστα σημειώστε ότι κάποιες παραλλαγές βασίζονται σε μια συνάρτηση μετρικής απόστασης αντί να βασίζονται σε μια συνάρτηση βαθμού διάταξης. Στη συνέχεια παρουσιάζουμε ένα κριτήριο επιλογής των συναρτήσεων $\nu(\cdot)$ και $\theta(\cdot)$ στο Επίπεδο-0.

Μια από τις παλαιότερες εφαρμογές του αλγόριθμου ΣΑΠ για ταξινόμηση, όπου οι N -διάστατοι $A \Delta W_1, \dots, W_{|C_a|}$ ήταν αποκλειστικά ορθογώνια παραλληλεπίπεδα και η είσοδος X_i ήταν αποκλειστικά σημείο (δηλ. τετριμμένο ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο) στον N -διάστατο Ευκλείδειο χώρο, οδήγησε στην επιλογή ενός ζεύγους συναρτήσεων $\nu(\cdot)$ και $\theta(\cdot)$ έτσι ώστε να ισχύει η συνθήκη $\nu_1([a,a]) = \nu(\theta(a)) + \nu(a) = 1$ σε κάθε βασικό πλέγμα με βάση το ακόλουθο σκεπτικό. Ως αποτέλεσμα της προαναφερθείσης συνθήκης σε κάθε βασικό πλέγμα προκύπτει $\nu_1([a,b]) = \nu(\theta(a)) + \nu(b) = \nu(b) - [1 - \nu(\theta(a))] + 1 = [\nu(b) - \nu(a)] + 1 = \delta_1([a,b]) + 1$. Χρησιμοποιώντας την συνάρτηση θετικής τιμοδότησης $V([a_1, b_1] \times \dots \times [a_N, b_N]) = \nu_1([a_1, b_1]) + \dots + \nu_1([a_N, b_N])$ για κάθε ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο προκύπτει: $\sigma_{\sqsubseteq}(W_J \sqsubseteq X_i) = \frac{V(X_i)}{V(W_J \sqcup X_i)} = \frac{N}{N + \Delta(W_J \sqcup X_i)}$.

Η γραμμή 16 στο Σχήμα 9.12 αφομοιώνει την είσοδο X_i επανα-υπολογίζοντας το W_J σύμφωνα με τη σχέση $W_J \doteq W_J \sqcup X_i$ όταν ήδη έχει εκπληρωθεί η συνθήκη $\sigma(W_J \sqsubseteq X_i) \geq \bar{\rho}_a$. Η

τελευταία (συνθήκη) συνεπάγεται $\frac{N}{N + \Delta(W_J \sqcup X_i)} \geq \bar{\rho}_a \Leftrightarrow \Delta(W_J \sqcup X_i) \leq \frac{N(1 - \bar{\rho}_a)}{\bar{\rho}_a}$. Με άλλα

λόγια, ο υπολογισμός $W_J \doteq W_J \sqcup X_i$ πραγματοποιείται μόνο όταν το μέγεθος $\Delta(W_J \sqcup X_i)$ του ορθογωνίου παραλληλεπίπεδου $W_J \sqcup X_i$ είναι μέχρι $\frac{N(1 - \bar{\rho}_a)}{\bar{\rho}_a}$. Για τους παραπάνω λόγους, ο

αλγόριθμος ΣΑΠ για ταξινόμηση, ακόμη και όταν εφαρμόζεται στο γενικότερο πλέγμα (F_1^N, \sqsubseteq) ή στο πλέγμα (F_2^N, \sqsubseteq) , συχνά ελέγχει τη συνθήκη « $\Delta(W_J \sqcup X_i) \leq \bar{\Delta}_a$ » αντί της συνθήκης « $\sigma(W_J \sqsubseteq X_i) \geq \bar{\rho}_a$ » προκειμένου να προβεί στον υπολογισμό $W_J \doteq W_J \sqcup X_i$.

Ένα ζεύγος συναρτήσεων $\nu(\cdot)$ και $\theta(\cdot)$, το οποίο ικανοποιεί τη συνθήκη $\nu_1([a,a]) = \nu(\theta(a)) + \nu(a) = 1$ στο βασικό πλέγμα $(L=[0,1], \leq)$ είναι το $\nu(x) = x$ και $\theta(x) = 1-x$. Ένα άλλο τέτοιο ζεύγος, το οποίο ικανοποιεί τη συνθήκη $\nu_1([a,a]) = \nu(\theta(a)) + \nu(a) = 1$ στο βασικό πλέγμα

$(L=[-\infty, +\infty], \leq)$ είναι το $\nu(x) = \frac{1}{1 + e^{-\lambda(x-\mu)}}$ και $\theta(x) = 2\mu - x$. Σημειωτέον ότι η συνάρτηση $\nu(x) =$

$\frac{1}{1+e^{-\lambda(x-\mu)}}$ είναι δημοφιλής (α) στην στατιστική ανάλυση με το όνομα **λογιστική παλινδρόμηση**, και (β) στα ΤΝΔ με το όνομα **σιγμοειδής συνάρτηση**. Η μαθηματική ανάλυση εδώ παρουσίασε ένα πλεονέκτημα της προαναφερθείσας συνάρτησης $\nu(\cdot)$ στον χώρο των ΑΔ.

- 1: Έστω ένα σύνολο $\{W_1, \dots, W_{|C|}\} = C \subset 2^{F_1^N}$, έστω $K = |C|$ η *πληθικότητα* του συνόλου C , και έστω μια παράμετρος $\rho \in [0, 1]$ η οποία ορίζεται από κάποιον χρήστη.
- 2: Από $i = 1$ έως $i = n_{\text{tm}}$ κάνε
- 3: Θεώρησε την επόμενη είσοδο (ΑΔ) $X_i \in F_1^N$.
- 4: Έστω το σύνολο $S \doteq C$.
- 5:
$$J = \underset{\substack{j \in \{1, \dots, |S|\} \\ W_j \in S}}{\text{argmax}} [\sigma(X_i \sqsubseteq W_j)].$$
- 6: Όσο ισχύει $(S \neq \{\})$. ΚΑΙ. $(\sigma(W_J \sqsubseteq X_i) < \rho)$ κάνε
- 7:
$$S \doteq S \setminus \{W_J\}.$$
- 8:
$$J = \underset{\substack{j \in \{1, \dots, |S|\} \\ W_j \in S}}{\text{argmax}} [\sigma(X_i \sqsubseteq W_j)]$$
- 9: Τέλος // Όσο ισχύει ...
- 10: Εάν $S \neq \{\}$ τότε
- 11:
$$C \doteq C \cup \{X_i\}.$$
- 12:
$$K \doteq K + 1.$$
- 13: αλλιώς
- 14:
$$W_J \doteq W_J \sqcup X_i.$$
- 15: Τέλος // Εάν ...
- 16: Τέλος // Από ... έως ...

Σχήμα 9.11 Αλγόριθμος Συλλογιστικής Ασαφών Πλεγμάτων (ΣΑΠ) για ομαδοποίηση.

- 1: Έστω ένα σύνολο $\{W_1, \dots, W_{|C_a|}\} = C_a \subset 2^{F_1^N}$, έστω $K = |C_a|$ η *πληθικότητα* του συνόλου C_a , έστω μια παράμετρος $\bar{\rho}_a \in [0, 1]$ η οποία ορίζεται από κάποιον χρήστη, έστω ε ένας πολύ μικρός θετικός αριθμός, έστω $B = \{b_1, \dots, b_L\}$ ένα σύνολο από «ετικέτες», και έστω μια συνάρτηση $\ell: F_1^N \rightarrow B$ πάνω στο C_a .
- 2: Από $i = 1$ έως $i = n_{\text{trn}}$ κάνε
- 3: Θεώρησε την επόμενη είσοδο $(X_i, \ell(X_i)) \in F_1^N \times B$.
- 4: Έστω το σύνολο $S \doteq C_a$.
- 5:
$$J = \underset{\substack{j \in \{1, \dots, |S|\} \\ W_j \in S}}{\text{argmax}} [\sigma(X_i \sqsubseteq W_j)].$$
- 6: Εάν $\ell(W_J) \neq \ell(X_i)$ τότε $\bar{\rho}_a = \sigma(W_J \sqsubseteq X_i) + \varepsilon$.
- 7: Όσο ισχύει $(S \neq \{\})$. ΚΑΙ. $(\sigma(W_J \sqsubseteq X_i) < \bar{\rho}_a)$ κάνε
- 8:
$$S \doteq S \setminus \{W_J\}.$$
- 9:
$$J = \underset{\substack{j \in \{1, \dots, |S|\} \\ W_j \in S}}{\text{argmax}} [\sigma(X_i \sqsubseteq W_j)]$$
- 10: Εάν $\ell(W_J) \neq \ell(X_i)$ τότε $\bar{\rho}_a = \sigma(W_J \sqsubseteq X_i) + \varepsilon$.
- 11: Τέλος // Όσο ισχύει ...
- 12: Εάν $S \neq \{\}$ τότε
- 13:
$$C_a \doteq C_a \cup \{X_i\} \text{ και } K \doteq K + 1.$$
- 14: Εάν $\ell(X_i) \notin B$ τότε $(B \doteq B \cup \{\ell(X_i)\} \text{ και } L \doteq L + 1).$
- 15: αλλιώς
- 16:
$$W_J \doteq W_J \sqcup X_i.$$
- 17: Τέλος // Εάν ...
- 18: Τέλος // Από ... έως ...

Σχήμα 9.12 Αλγόριθμος Συλλογιστικής Ασαφών Πλεγμάτων (ΣΑΠ) για ταξινόμηση.

- 1: Έστω ένα σύνολο $\{W_1, \dots, W_K\} = C \subset 2^{F_1^N}$ από ΑΔ, έστω $|C|$ η *πληθικότητα* του συνόλου C , έστω ένα σύνολο $B = \{b_1, \dots, b_L\}$ από ετικέτες, και έστω μια απεικόνιση $\ell: F_1^N \rightarrow B$.
- 2: Από $i = 1$ έως $i = n_{\text{tst}}$ κάνε
- 3: Θεώρησε το επόμενο ζευγάρι εισόδου $(X_i, b_i) \in F_1^N \times B$ προς αναγνώριση.
- 4:
$$J = \underset{\substack{j \in \{1, \dots, |C|\} \\ W_j \in C}}{\text{argmax}} [\sigma(X_i \sqsubseteq W_j)].$$
- 5: Το δεδομένο εισόδου X_i κατηγοριοποιείται στην κατηγορία $\ell(W_J)$.
- 6: Τέλος // Από ... έως ...
- 7: Υπολόγισε το ποσοστό των σωστών αναγνώρισεων στο σύνολο των δεδομένων.

Σχήμα 9.13 Αλγόριθμος Συλλογιστικής Ασαφών Πλεγμάτων (ΣΑΠ) για αναγνώριση.

9.3.2 Αλγόριθμοι Παλινδρόμησης

Δύο ΑΔ μπορούν να προστεθούν μεταξύ τους. Επίσης ένας ΑΔ μπορεί να πολλαπλασιαστεί με μη-αρνητικό αριθμό ή/και να μετασχηματιστεί μη-γραμμικά χρησιμοποιώντας μια (γνησίως) αύξουσα συνάρτηση. Με εκτέλεση των προαναφερθέντων δύο πράξεων (βλ. πρόσθεση και πολλαπλασιασμός), προκύπτει ένας αλγόριθμος παλινδρόμησης ο οποίος απεικονίζει, μη-γραμμικά, μια N -άδα ΑΔ σε ένα ΑΔ. Για παράδειγμα, θεωρείστε το ΤΝΔ στο Σχήμα 1.2 με βάρη που είναι μόνον θετικοί αριθμοί και εισόδους ΑΔ. Σύμφωνα με τα προηγούμενα, το ΤΝΔ στο Σχήμα 1.2 μπορεί να υλοποιήσει μια συνάρτηση παλινδρόμησης $f: F_1^N \rightarrow F_1$ [14]. Συνεπώς, η αρχιτεκτονική του Σχήματος 1.2 μπορεί να υλοποιήσει ένα νευρο-ασαφές σύστημα, αν ένας ΑΔ ερμηνευτεί ως μια *κατανομή εφικτότητας*. Επεκτάσεις σε ΑΔ T2 [17] είναι κατευθείαν υλοποιήσιμες.

Περαιτέρω δυνατότητες συνεπάγονται αν ένας ΑΔ ερμηνευτεί ως μια *κατανομή πιθανότητας*. Στην τελευταία περίπτωση, η αρχιτεκτονική στο Σχήμα 1.2 μπορεί να υπολογίσει μια κατανομή (στην έξοδο του ΤΝΔ) από N κατανομές (στην είσοδο του ΤΝΔ). Συνεπώς, αν ένας ΑΔ αναπαριστάνει μια (τεράστια) κατανομή αριθμητικών δειγμάτων τότε ο χειρισμός ΑΔ συνεπάγεται τον χειρισμό **τεράστιων δεδομένων** [12].

Ερωτήσεις Κατανόησης και Ασκήσεις Κεφαλαίου 9

- 9.1) Για το ζεύγος συναρτήσεων $v(x) = \frac{1}{1+e^{-\lambda(x-\mu)}}$ και $\theta(x) = 2\mu-x$ να υπολογιστεί η τιμή της συνάρτησης $v_1([a,a]) = v(\theta(a)) + v(a)$ για ένα τετριμμένο διάστημα $[a,a]$ στο ατομικό πλέγμα (I_1, Ξ) των διαστημάτων $T1$ στο πλέγμα $(L = [-\infty, +\infty], \leq)$. Τι παρατηρείτε; Να επαναληφθεί η άσκηση για το ζεύγος συναρτήσεων $v(x) = x$ και $\theta(x) = 1-x$ στο πλέγμα $(L = [0, 1], \leq)$.
- 9.2) Να δειχθεί ότι (α) η συνάρτηση θετικής τιμοδότησης $v_1(\cdot)$ επαληθεύει τις δύο λογικές απαιτήσεις $v_1(O = [i, o]) = 0$ και $v_1(I = [o, i]) < +\infty$, και (β) η συνάρτηση θετικής τιμοδότησης $v_2(\cdot)$ επαληθεύει τις δύο λογικές απαιτήσεις $v_2(O = [[o, i], [i, o]]) = 0$ και $v_2(I = [[i, o], [o, i]]) < +\infty$.
- 9.3) Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $d_1: I_1 \times I_1 \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ στο πλέγμα (I_1, Ξ) των διαστημάτων $T1$, η οποία δίνεται από τον τύπο (9.1): $d_1(x, y) = d(\theta(a), \theta(c)) + d(b, e)$ είναι μετρική.
- 9.4) Θεωρείστε το πλέγμα (I_2, Ξ) των διαστημάτων $T2$ σε ένα πλήρες πλέγμα (L, \leq) πραγματικών αριθμών. Να δείξετε ότι μια μετρική συνάρτηση $d_2: I_2 \times I_2 \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ δίνεται από τον τύπο (9.4): $d_2([[a_1, a_2], [b_1, b_2]], [[c_1, c_2], [e_1, e_2]]) = d(a_1, c_1) + d(\theta(a_2), \theta(c_2)) + d(\theta(b_1), \theta(e_1)) + d(b_2, e_2)$.
- 9.5) Έστω ένα πλήρες πλέγμα (L, \leq) . Να δειχθεί ότι η συνάρτηση $\theta_1: L \times L \rightarrow L \times L$, η οποία δίνεται από τον τύπο $\theta_1([a, b]) = [b, a]$ είναι δυικού ισομορφισμού στο πλέγμα $(L \times L, \geq \times \leq)$ των γενικευμένων διαστημάτων.
- 9.6) Θεωρείστε το σύνολο \mathbf{C} των κύκλων στο επίπεδο με θετικές και με αρνητικές ακτίνες [6]. Συγκεκριμένα, έστω ότι η περιφέρεια κύκλου με θετική ακτίνα απεικονίζεται στο επίπεδο με συνεχή γραμμή, ενώ η περιφέρεια κύκλου με αρνητική ακτίνα απεικονίζεται στο επίπεδο με διακεκομμένη γραμμή όπως φαίνεται στο Σχήμα 9.14. Το ζεύγος (\mathbf{C}, Ξ) προφανώς είναι μδσυν, αλλά δεν είναι πλέγμα διότι για $p, q \in \mathbf{C}$ δεν υπάρχει ούτε μέγιστο κάτω φράγμα $(p \sqcap q) \in \mathbf{C}$ ούτε ελάχιστο άνω φράγμα $(p \sqcup q) \in \mathbf{C}$.

Έστω το γνήσιο υποσύνολο $\mathbf{C}_\varepsilon \subset \mathbf{C}$ το οποίο περιλαμβάνει όλους τους κύκλους του επιπέδου τα κέντρα των οποίων βρίσκονται επάνω σε μια ευθεία (ε) . Τότε το ζεύγος $(\mathbf{C}_\varepsilon, \Xi)$ είναι πλέγμα σκιαγραφείται στην ακόλουθη, κατασκευαστική απόδειξη.

Απόδειξη: Έστω μια ευθεία (ε) με μια τυχαία αρχή και δύο κύκλοι $p, q \in \mathbf{C}_\varepsilon$. Προς τη μία κατεύθυνση, η (ορθή) προβολή ενός κύκλου $c \in \mathbf{C}_\varepsilon$ πάνω στην ευθεία (ε) είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα $[a_c, b_c]$ τέτοιο ώστε είναι $a_c \leq b_c$ αν και μόνο αν ο κύκλος c έχει θετική ακτίνα ίση με $(b_c - a_c)/2$, και είναι $a_c > b_c$ αν και μόνο αν ο κύκλος c έχει αρνητική ακτίνα ίση με $(b_c - a_c)/2$. Προς την άλλη κατεύθυνση, δοθείσης της προβολής $[a_c, b_c]$ ενός κύκλου $c \in \mathbf{C}_\varepsilon$, ο κύκλος c κατασκευάζεται με κέντρο το μέσον

του διαστήματος $[a_c, b_c]$ και ακτίνα ίση με $(b_c - a_c)/2$. Συνεπώς, υπάρχει μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ του συνόλου των κύκλων στο \mathbf{C}_ε και του συνόλου των γενικευμένων διαστημάτων στο πλέγμα $([-\infty, -\infty] \times [-\infty, -\infty], \geq \times \leq)$.

Δοθέντων των προβολών $[a_p, b_p]$ και $[a_q, b_q]$ δύο κύκλων $p, q \in \mathbf{C}_\varepsilon$ η διατομή υπολογίζεται ως $[a_p, b_p] \Pi [a_q, b_q] = [a_p \vee a_q, b_p \wedge b_q]$ και η συνένωση υπολογίζεται ως $[a_p, b_p] \sqcup [a_q, b_q] = [a_p \wedge a_q, b_p \vee b_q]$.

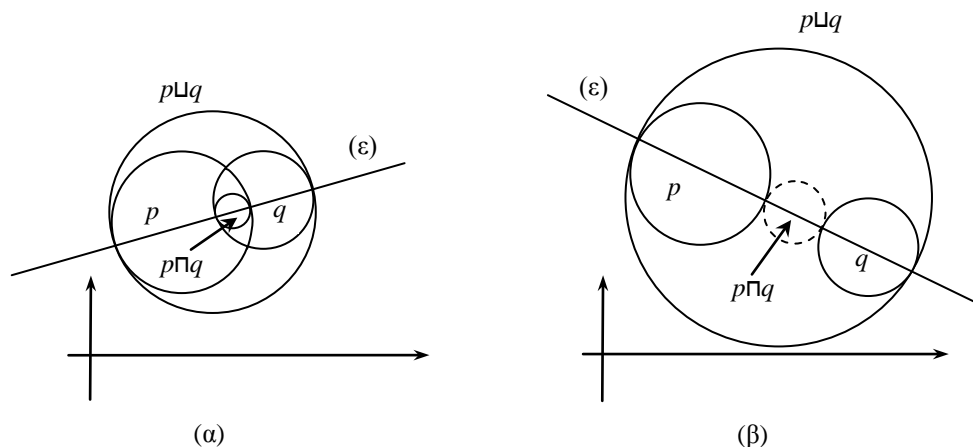
Ως συνάρτηση $v: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}_0^+$ θετικής τιμοδότησης μπορεί να οριστεί μια γνησίως αύξουσα συνάρτηση πάνω στην «ευθεία των ακτίνων». Επίσης, ως συνάρτηση $\theta: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ δυικού ισομορφισμού μπορεί να οριστεί μια γνησίως φθίνουσα συνάρτηση πάνω στην «ευθεία των ακτίνων». Σημειωτέον ότι διαφορετικές συναρτήσεις $v(\cdot)$ και $\theta(\cdot)$ μπορούν να οριστούν πάνω σε διαφορετικές ευθείες. Ωστόσο, όταν ορίσουμε ίδιες συναρτήσεις $v(\cdot)$ και $\theta(\cdot)$ πάνω σε κάθε ευθεία του επιπέδου τότε το επίπεδο καλείται **ισοτροπικό**.

Τα προηγούμενα μπορούν να επεκταθούν σε υπερ-σφαίρες στον χώρο \mathbf{R}^N .

Ερωτήσεις:

(α) Να υπολογίσετε μια μετρική ανάμεσα στον κύκλο με κέντρο το σημείο (1,1) και ακτίνα $r=1$ και στον κύκλο με κέντρο το σημείο (2,3) και ακτίνα $R=2$.

(β) Δείξτε μια συνάρτηση $v: \mathbf{C}_\varepsilon \times \mathbf{C}_\varepsilon \rightarrow \mathbf{R}_0^+$ θετικής τιμοδότησης που να ικανοποιεί τις δύο λογικές απαιτήσεις $v(O)=0$ και $v(I) < +\infty$.



Σχήμα 9.14 Έστω οι δύο κύκλοι p και q με θετικές ακτίνες. Η ευθεία (ε) διέρχεται από τα κέντρα των κύκλων p και q .

(α) Ο κύκλος $p \Pi q$ έχει θετική ακτίνα, όπως ο κύκλος $p \cup q$ έχει θετική ακτίνα.

(β) Ο κύκλος $p \Pi q$ έχει αρνητική ακτίνα, ενώ ο κύκλος $p \cup q$ έχει θετική ακτίνα.

9.7) Μια συνάρτηση $v: L \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ θετικής τιμοδότησης στο πλέγμα ($L=[0,i], \leq$) τυπικά επιλέγεται έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι δύο λογικές απαιτήσεις $v(0)=0$ και $v(i) < +\infty$. Ένας τρόπος υπολογισμού της συνάρτησης $v(\cdot)$ είναι με την ολοκλήρωση $v(x) = \int_0^x m(t) dt$ μιας **συνάρτησης μάζας** $m: L \rightarrow \mathbb{R}_0^+$, η οποία δίδει ένα προκαθορισμένο βάρος $m(x) \geq 0$ σε κάθε $x \in L$.

Να υπολογιστεί:

(1) η συνάρτηση μάζας $m_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$, η οποία υπολογίζει την συνάρτηση θετικής τιμοδότησης $v_1(x) = 1/[1+e^{-\lambda(x-\mu)}]$, και (2) η συνάρτηση μάζας $m_2: [0,1] \rightarrow [0,1]$, η οποία υπολογίζει την συνάρτηση θετικής τιμοδότησης $v_2(x) = x$.

9.8) Έστω δύο ΑΔ F_1 και F_2 με συναρτήσεις βαθμού συμμετοχής $f_1(x) = \begin{cases} 0.5x - 0.5, & \text{αν } 1 \leq x \leq 3 \\ -x + 4, & \text{αν } 3 \leq x \leq 4 \end{cases}$ και $f_2(x) = \begin{cases} -(x-6)^2 + 5, & \text{αν } 5 \leq x \leq 6 \\ -0.5x + 4, & \text{αν } 6 \leq x \leq 8 \end{cases}$, αντίστοιχα. Θεωρείστε τις δύο γραμμικές συναρτήσεις $\theta(x) = -x$ και $\nu(x) = x$.

(α) Να δείξετε στο επίπεδο τις γραφικές παραστάσεις των ΑΔ F_1 και F_2 .

(β) Να υπολογίσετε την μετρική απόσταση $D_1(F_1, F_2)$.

(γ) Να υπολογίσετε τους βαθμούς διάταξης $\sigma_\lambda(F_1, F_2)$ και $\sigma_\nu(F_1, F_2)$.

(δ) Επαναλάβετε τα παραπάνω ερωτήματα χρησιμοποιώντας τις συναρτήσεις $\theta(x) = -e^x$ και $\nu(x) = 1/e^{-x^2}$.

9.9) Έστω δύο ΑΔ F_1 και F_2 με συναρτήσεις βαθμού συμμετοχής $f_1(x) = \begin{cases} x-1, & \text{αν } 1 \leq x \leq 2 \\ -0.5x + 2, & \text{αν } 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$ και $f_2(x) = \begin{cases} -(x-7)^2 + 16, & \text{αν } 6 \leq x \leq 8 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$, αντίστοιχα. Θεωρείστε τις δύο γραμμικές συναρτήσεις $\theta(x) = -2x$ και $\nu(x) = x+1$.

(α) Να δείξετε στο επίπεδο τις γραφικές παραστάσεις των ΑΔ F_1 και F_2 .

(β) Να υπολογίσετε την μετρική απόσταση $D_1(F_1, F_2)$.

(γ) Να υπολογίσετε τους βαθμούς διάταξης $\sigma_\lambda(F_1, F_2)$ και $\sigma_\nu(F_1, F_2)$.

(δ) Επαναλάβετε τα παραπάνω ερωτήματα χρησιμοποιώντας τις συναρτήσεις $\theta(x) = \ln(1/x)$ και $\nu(x) = 1/(1+e^{-x})$.

9.10) Έστω δύο ΑΔ F_1 και F_2 με συναρτήσεις βαθμού συμμετοχής $f_1(x) = \begin{cases} -(x-2)^2 + 1, & \text{αν } 1 \leq x \leq 3 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$ και $f_2(x) = \begin{cases} -x^2 + 10x - 4, & \text{αν } 4 \leq x \leq 6 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$, αντίστοιχα. Θεωρείστε τις δύο γραμμικές συναρτήσεις $\theta(x) = -x$ και $\nu(x) = 2x+1$.

(α) Να δείξετε στο επίπεδο τις γραφικές παραστάσεις των ΑΔ F_1 και F_2 .

(β) Να υπολογίσετε την μετρική απόσταση $D_1(F_1, F_2)$.

(γ) Να υπολογίσετε τους βαθμούς διάταξης $\sigma_\lambda(F_1, F_2)$ και $\sigma_\nu(F_1, F_2)$.

(δ) Επαναλάβετε τα παραπάνω ερωτήματα χρησιμοποιώντας τις συναρτήσεις $\theta(x) = e^{-x}$ και $\nu(x) = \ln(x)$.

9.11) Έστω δύο τραπεζοειδείς ΑΔ F_1 και F_2 με συναρτήσεις βαθμού συμμετοχής

$$f_1(x) = \begin{cases} x-1, & \text{αν } 1 \leq x \leq 2 \\ 1, & \text{αν } 2 \leq x \leq 3 \\ -0.5x+2.5, & \text{αν } 3 \leq x \leq 5 \end{cases} \quad \text{και} \quad f_2(x) = \begin{cases} x-6, & \text{αν } 6 \leq x \leq 7 \\ 10, & \text{αν } 7 \leq x \leq 10 \\ -0.5x+6.5, & \text{αν } 10 \leq x \leq 12 \end{cases},$$

αντίστοιχα. Θεωρείστε τις δύο γραμμικές συναρτήσεις $\theta(x) = -2x+1$ και $\nu(x) = x+1$.

(α) Να δείξετε στο επίπεδο τις γραφικές παραστάσεις των ΑΔ F_1 και F_2 .

(β) Να υπολογίσετε την μετρική απόσταση $D_1(F_1, F_2)$.

(γ) Να υπολογίσετε τους βαθμούς διάταξης $\sigma_\lambda(F_1, F_2)$ και $\sigma_\nu(F_1, F_2)$.

(δ) Επαναλάβετε τα παραπάνω ερωτήματα χρησιμοποιώντας τις συναρτήσεις $\theta(x) = e^{-x}$ και $\nu(x) = \ln(x)$.

9.12) Έστω ένας τριγωνικός ΑΔ F_1 και ένας τραπεζοειδής ΑΔ F_2 . Η συνάρτηση βαθμού συμμετοχής του F_1 είναι $f_1(x) = \begin{cases} 2x-1, & \text{αν } 0.5 \leq x \leq 1 \\ -\frac{1}{4}x + \frac{5}{4}, & \text{αν } 1 \leq x \leq 5 \end{cases}$, ενώ η συνάρτηση

βαθμού συμμετοχής του F_2 είναι και $f_2(x) = \begin{cases} 0.5x-3.5, & \text{αν } 6 \leq x \leq 8 \\ 10, & \text{αν } 8 \leq x \leq 10 \\ -x+11, & \text{αν } 10 \leq x \leq 11 \end{cases}$.

Θεωρείστε τις συναρτήσεις $\theta(x) = -2x+1$ και $\nu(x) = e^x$.

(α) Να δείξετε στο επίπεδο τις γραφικές παραστάσεις των δύο ΑΔ F_1 και F_2 .

(β) Να υπολογίσετε την μετρική απόσταση $D_1(F_1, F_2)$.

(γ) Να υπολογίσετε τους βαθμούς διάταξης $\sigma_\lambda(F_1, F_2)$ και $\sigma_\nu(F_1, F_2)$.

9.13) Δίδονται οι ΑΔ F_1, F_2, F_3 και F_4 με συναρτήσεις βαθμού συμμετοχής

$$f_1(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}, & \text{αν } 0.5 \leq x \leq 1 \\ -\frac{2}{3}x + \frac{7}{3}, & \text{αν } 1 \leq x \leq 5 \end{cases}, \quad f_2(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}x - \frac{10}{3}, & \text{αν } 6.5 \leq x \leq 8 \\ -\frac{2}{3}x + \frac{16}{3}, & \text{αν } 8 \leq x \leq 10 \end{cases},$$

$$f_3(x) = \begin{cases} 0.5x, & \text{αν } 0 \leq x \leq 2 \\ -0.5x + 2, & \text{αν } 2 \leq x \leq 4 \end{cases} \quad \text{και} \quad f_4(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{9}{4}, & \text{αν } 4.5 \leq x \leq 6.5 \\ -\frac{1}{2}x + \frac{17}{4}, & \text{αν } 6.5 \leq x \leq 8.5 \end{cases},$$

αντίστοιχα. Θεωρείστε τις δύο γραμμικές συναρτήσεις $\theta(x) = -2x$ και $\nu(x) = 3x + 2$.

(α) Να δείξετε στο επίπεδο τις γραφικές παραστάσεις των ΑΔ F_1, F_2, F_3 και F_4 .

(β) Να υπολογίσετε τις μετρικές αποστάσεις $D_1(F_1, F_2)$ και $D_1(F_3, F_4)$.

(γ) Να υπολογίσετε τους βαθμούς διάταξης $\sigma_\nu(F_1, F_2)$ και $\sigma_\nu(F_3, F_4)$.

(δ) Συγκρίνετε και σχολιάστε τα αποτελέσματα του (β) ερωτήματος καθώς και τα αποτελέσματα του (γ) ερωτήματος.

9.14) Δίδονται οι ΑΔ F_1, F_2, F_3 και F_4 με συναρτήσεις βαθμού συμμετοχής

$$f_1(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}, & \text{αν } 0.5 \leq x \leq 2 \\ -\frac{2}{3}x + \frac{7}{3}, & \text{αν } 2 \leq x \leq 5 \end{cases}, \quad f_2(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}x - \frac{10}{3}, & \text{αν } 6.5 \leq x \leq 8 \\ -\frac{2}{3}x + \frac{16}{3}, & \text{αν } 6.5 \leq x \leq 8 \end{cases},$$

$$f_3(x) = \begin{cases} 0.5x, & \text{αν } 0 \leq x \leq 2 \\ -0.5x + 2, & \text{αν } 2 \leq x \leq 4 \end{cases} \quad \text{και} \quad f_4(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{9}{4}, & \text{αν } 4.5 \leq x \leq 6.5 \\ -\frac{1}{2}x + \frac{17}{4}, & \text{αν } 6.5 \leq x \leq 8.5 \end{cases},$$

αντίστοιχα. Θεωρείστε τις δύο μη-γραμμικές συναρτήσεις $\theta(x) = e^{-x^2}$ και $\nu(x) = e^{2x+1}$.

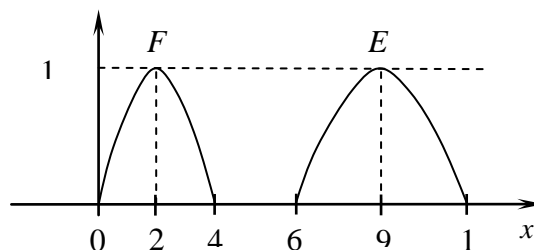
(α) Να δείξετε στο επίπεδο τις γραφικές παραστάσεις των ΑΔ F_1, F_2, F_3 και F_4 .

(β) Να υπολογίσετε οι μετρικές αποστάσεις $D_1(F_1, F_2)$ και $D_1(F_3, F_4)$.

(γ) Να υπολογίσετε τους βαθμούς διάταξης $\sigma_\nu(F_1, F_2)$ και $\sigma_\nu(F_3, F_4)$.

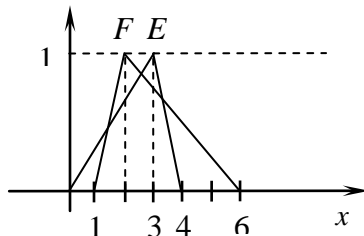
(δ) Συγκρίνετε και σχολιάστε τα αποτελέσματα του (β) ερωτήματος καθώς και τα αποτελέσματα του (γ) ερωτήματος.

9.15) Να υπολογιστεί η μετρική απόσταση $D_1(F, E)$ μεταξύ των δύο παραβολικών ασαφών αριθμών $F = F(h) = [a_h, b_h]$, $h \in [0, 1]$ και $E = E(h) = [c_h, d_h]$, $h \in [0, 1]$, με $\theta(x) = -x$ και $\nu(x) = x$.



Σχήμα 9.15 Δύο ΑΔ F και E με παραβολικές συναρτήσεις βαθμού συμμετοχής.

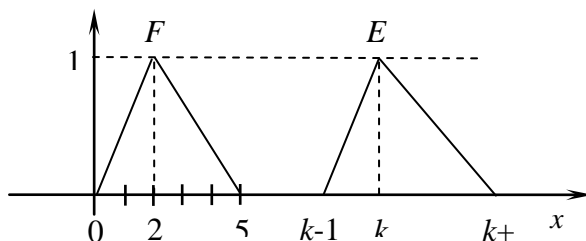
- 9.16) Να υπολογιστεί η μετρική απόσταση $D_1(F,E)$ μεταξύ των δύο τριγωνικών ασαφών αριθμών $F = F(h) = [a_h, b_h]$, $h \in (0,1]$ και $E = E(h) = [c_h, d_h]$, $h \in (0,1]$ του σχήματος, με $\theta(x) = -x$ και $\nu(x) = x$.



Σχήμα 9.16 Δύο ΑΔ F και E με τριγωνικές συναρτήσεις βαθμού συμμετοχής.

- 9.17) Έστω $D_1(F,E)$ η μετρική απόσταση μεταξύ των δύο τριγωνικών ασαφών αριθμών $F = F(h) = [a_h, b_h]$, $h \in [0,1]$ και $E = E(h) = [c_h, d_h]$, $h \in [0,1]$ του σχήματος, με $\theta(x) = -x$ και $\nu(x) = \begin{cases} x, & x < k \\ kx & x \geq k \end{cases}$.

Να υπολογιστεί η θέση “ $k > 0$ ” της κορυφής του E έτσι ώστε $D_1(F,E) = 21.5$.



Σχήμα-1

Σχήμα 9.17 Δύο ΑΔ F και E με τριγωνικές συναρτήσεις βαθμού συμμετοχής.

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ

- $\int \frac{1}{ah+b} dh = \frac{1}{a} \ln|ah+b| + C_0$
- $\int \sqrt{ah+bdh} = \frac{2\sqrt{(ah+b)^3}}{3a} + C_0$

Βιβλιογραφία Κεφαλαίου 9

- [1] G. Alefeld, J. Herzberger, *Introduction to Interval Computation*. New York, NY: Academic Press, 1983.
- [2] B.A. Davey, H.A. Priestley, *Introduction to Lattices and Order*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1990.
- [3] T.G. Dietterich, R.H. Lathrop, T. Lozano-Perez, “Solving the multiple-instance problem with axis-parallel rectangles”, *Artificial Intelligence*, vol. 89, nos. 1-2, pp. 31-71, 1997.
- [4] R.O. Duda, P.E. Hart, D.G. Stork, *Pattern Classification*, 2nd ed. New York, N.Y.: John Wiley & Sons, Inc., 2001.
- [5] V.G. Kaburlasos, “FINs: lattice theoretic tools for improving prediction of sugar production from populations of measurements”, *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics – Part B*, vol. 34, no. 2, pp. 1017-1030, 2004.
- [6] V.G. Kaburlasos, *Towards a Unified Modeling and Knowledge-Representation Based on Lattice Theory*. Heidelberg, Germany: Springer, series: Studies in Computational Intelligence 27, 2006.
- [7] V.G. Kaburlasos, A. Kehagias, “Novel fuzzy inference system (FIS) analysis and design based on lattice theory. part I: working principles”, *International Journal of General Systems*, vol. 35, no. 1, pp. 45-67, 2006.
- [8] V.G. Kaburlasos, A. Kehagias, “Fuzzy inference system (FIS) extensions based on lattice theory”, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 22, no. 3, pp. 531-546, 2014.
- [9] V.G. Kaburlasos, T. Pachidis, “A Lattice-Computing ensemble for reasoning based on formal fusion of disparate data types, and an industrial dispensing application”, *Information Fusion*, vol. 16, pp. 68-83, 2014.
- [10] V.G. Kaburlasos, S.E. Papadakis, “Granular self-organizing map (grSOM) for structure identification”, *Neural Networks*, vol. 19, no. 5, pp. 623-643, 2006.
- [11] V.G. Kaburlasos, S.E. Papadakis, “A granular extension of the fuzzy-ARTMAP (FAM) neural classifier based on fuzzy lattice reasoning (FLR)”, *Neurocomputing*, vol. 72, no. 10-12, pp. 2067-2078, 2009.
- [12] V.G. Kaburlasos, G.A. Papakostas, “Learning distributions of image features by interactive fuzzy lattice reasoning (FLR) in pattern recognition applications”, *IEEE Computational Intelligence Magazine*, vol. 10, no. 3, pp. 42-51, 2015.

- [13] V.G. Kaburlasos, S.E. Papadakis, A. Amanatiadis, “Binary image 2D shape learning and recognition based on lattice computing (LC) techniques”, *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, vol. 42, no. 2-3, pp. 118-133, 2012.
- [14] V.G. Kaburlasos, G.A. Papakostas, T. Pachidis, A. Athinellis, “Intervals’ numbers (INs) interpolation /extrapolation”, *Proceedings of the IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE 2013)*, Hyderabad, India, 7-10 July 2013.
- [15] A. Kaufmann, M.M. Gupta, *Introduction to Fuzzy Arithmetic – Theory and Applications*. New York, NY: Van Nostrand Reinhold, 1985.
- [16] P.M. Long, L. Tan, “PAC learning axis-aligned rectangles with respect to product distributions from multiple-instance examples”, *Machine Learning*, vol. 30, no. 1, pp. 7-21, 1998.
- [17] J.M. Mendel, H. Hagsras, R.I. John (Eds.), Special issue on: Type-2 fuzzy sets and systems, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 21, no. 3, pp. 397-398, 2013.
- [18] R.E. Moore, *Methods and Applications of Interval Analysis*. Philadelphia, PA: SIAM Studies in Applied Mathematics, 1979.
- [19] R. Moore, W. Lodwick, “Interval analysis and fuzzy set theory”, *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 135, no. 1, pp. 5-9, 2003.
- [20] S.E. Papadakis, V.G. Kaburlasos, “Piecewise-linear approximation of nonlinear models based on probabilistically/possibilistically interpreted Intervals’ Numbers (INs)”, *Information Sciences*, vol. 180, iss. 24, pp. 5060-5076, 2010.
- [21] A.L. Ralescu, D.A. Ralescu, “Probability and fuzziness”, *Information Sciences*, vol. 34, no. 2, pp. 85-92, 1984.
- [22] S. Salzberg, “A nearest hyperrectangle learning method”, *Machine Learning*, vol. 6, no. 3, pp. 251-276, 1991.
- [23] H. Samet, “Hierarchical representations of collections of small rectangles”, *ACM Computing Surveys*, vol. 20, no. 4, pp. 271-309, 1988.
- [24] H. Tanaka, H. Lee, “Interval regression analysis by quadratic programming approach”, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 6, no. 4, pp. 473-481, 1998.
- [25] K. Uehara, M. Fujise, “Fuzzy inference based on families of α -level sets”, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 1, no. 2, pp. 111-124, 1993.
- [26] K. Uehara, K. Hirota, “Parallel and multistage fuzzy inference based on families of α -level sets”, *Information Sciences*, vol. 106, nos. 1-2, pp. 159-195, 1998.

- [27] S. Wonneberger, "Generalization of an invertible mapping between probability and possibility", *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 64, no. 2, pp. 229-240, 1994.

Εισαγωγή στην Χρήση MATLAB και Υπολογιστικά Παραδείγματα

Η λέξη MATLAB είναι ακρόνυμο των λέξεων MATrix (πίνακας) LABoratory (εργαστήριο). Δύο χαρακτηριστικά γνωρίσματα του MATLAB είναι ο εύκολος χειρισμός πινάκων με αριθμούς καθώς και η εύκολη σχεδίαση γραφημάτων. Σήμερα το MATLAB είναι παγκοσμίως αναγνωρισμένο και χρησιμοποιείται για ανάλυση και σχεδίαση γραμμικών και μη-γραμμικών συστημάτων. Τυπικά, σε κάποιο πεδίο εφαρμογών (όπως ασαφή συστήματα, νευρωνικά δίκτυα, κλπ) αναπτύσσεται ένα **πρόγραμμα εφαρμογής** του MATLAB. Στη συνέχεια παρουσιάζεται μια σύντομη εισαγωγή στο υπολογιστικό περιβάλλον “MATLAB”.

A Εισαγωγή στην Χρήση MATLAB**A.1 Βασικές Αρχές του MATLAB****A.1.1 Είσοδος δεδομένων από το πληκτρολόγιο.**

Εισαγωγή διανύσματος

```
>> A=[1 2 3 4]
>> A=[1,2,3,4];
```

Εισαγωγή πίνακα

```
>> A=[1 2 3 4;5 6 7 8]
>> A=[1 2 3 4];
```

Ανάστροφος πίνακα/διανύσματος

```
>> A=A'
```

A.1.2 Είσοδος δεδομένων από εξωτερικά αρχεία.

Γιά φόρτωμα ενός ASCII αρχείου

```
>> load IN.DAT
```

Για αποθήκευση των μεταβλητών *VarName1 VarName2 VarName3 ...* στο αρχείο *Filename*

.

```
>> save Filename VarName1 VarName2
```

VarName3 ...

Για αποθήκευση της μεταβλητής *VarName* σε ASCII μορφή στο αρχείο *Filename.Extension*.

```
>> save Filename.Extension VarName -ascii
```


A.1.3 Χρήσιμες εντολές.

Μορφοποίηση των μεταβλητών

```
>> format short  
>> format long
```

Γιά βοήθεια από το ίδιο το MATLAB τύπωσε “help”.

Οι γνωστές εντολές “dir”, “cd” υπάρχουν και στο MATLAB .

Η εντολή “clear” σβήνει όλες τις μεταβλητές.

Η εντολή “clc” καθαρίζει μόνο την οθόνη.

A.2 Χειρισμός Διανυσμάτων και Πινάκων

A.2.1 Στοιχεία ενός πίνακα

Ένα από τα σημαντικότερα χαρακτηριστικά του MATLAB είναι ο μη-καθορισμός των διαστάσεων ενός πίνακα εκ των προτέρων.

Αναφερόμαστε σε ένα στοιχείο κάποιου πίνακα χρησιμοποιώντας τους κατάλληλους δείκτες

```
>> A(i, j)
```

Για να σβήσουμε ένα στοιχείο κάποιου πίνακα

```
>> x(4) = []
```

Για να βρούμε το μέγεθος κάποιου πίνακα

```
>> size(A)
```

Για να βρούμε το μήκος κάποιου διανύσματος

```
>> length(A)
```

Για να βρούμε ποιές μεταβλητές υπάρχουν στο χώρο εργασίας

```
>> who
```

Για να βρούμε το μέγεθος των μεταβλητών του χώρου εργασίας

```
>> whos
```

A.2.2 Αναπαράσταση διαστήματος

Ένα διάστημα μπορεί να οριστεί περιγραφικά ορίζοντας την αρχή του, το τέλος του, καθώς και το βήμα σάρωσης του, π.χ.

```
>> x=0:0.01:5;  
>> x=0:pi/4:pi
```

Ένα διάστημα μπορεί επίσης να οριστεί ορίζοντας την αρχή του, το τέλος του, καθώς και το πλήθος των σημείων του

```
>> k=linspace(-pi, pi, 4)
```

Για λογαριθμική κλίμακα μεταξύ των άκρων ενός διαστήματος χρησιμοποιούμε την εντολή

```
>> k=logspace(p1, p2, #points)
```

όπου τα p_1 και p_2 είναι δυνάμεις (εκθέτες) του 10, π.χ. η εντολή `logspace(1, 2)` αντιστοιχεί στο διάστημα $[10^1, 10^2]$.

A.2.3 Πράξεις με πίνακες

Αναφερόμαστε σε τμήματα ενός πίνακα με διανύσματα πίνακα

```
>> B=A(1:3, 1:3)
```

Εάν “a” και “k” είναι n-διάστατα διανύσματα και τα στοιχεία του “k” είναι 0 και 1 τότε το `a(k)` δίνει μόνο τα στοιχεία του “a” που βρίσκονται στην ίδια θέση με τα 1 του διανύσματος “k”.

```
>> a=[2 4 45 22];  
>> k=[0 1 0 1];  
>> a(find(k))  
ans=  
4 22
```

A.2.4 Ειδικοί πίνακες

Μοναδιαίος πίνακας

```
>> eye(4)  
>> eye(3,4)
```

Πίνακας με μηδενικά

```
>> zeros(3)
```

Πίνακας με μονάδες

```
>> ones(1,5)
```

Διαγώνιος πίνακα (2 χρήσεις)

```
>> A=diag([1 2 3 4])  
>> diag(A)
```

A.2.5 Σειρές χαρακτήρων

Μπορούμε να βάλουμε ένα σύνολο λέξεων σε ένα διδιάστατο πίνακα ως εξής

```
>> A=str2mat('today','it will','rain')
```

A.3 Βαθμωτές Πράξεις

Διάφορες συναρτήσεις που ορίζονται στο MATLAB

- `ans` το αποτέλεσμα μιάς πράξης όταν δεν ορίζεται μιά μεταβλητή.
- `eps` η ακρίβεια των υπολογισμών.
- `computer` ο τύπος του H/Y.
- `pi` ο αριθμός π.

• <code>i, j</code>	ο μιγαδικός αριθμός $\sqrt{-1}$.
• <code>Inf</code>	το άπειρο.
• <code>NaN</code>	ο "μη-αριθμός", π.χ. 0/0.
• <code>clock</code>	το ρολόι του Η/Υ.
• <code>cputime</code>	ο χρόνος που πέρασε για την κεντρική μονάδα επεξεργασίας.
• <code>date</code>	η ημερομηνία.
• <code>realmax</code>	ο πίο μεγάλος αριθμός.
• <code>realmin</code>	ο πίο μικρός αριθμός.
• <code>nargin</code>	ο αριθμός των ορισμάτων εισόδου μιάς συνάρτησης.
• <code>nargout</code>	ο αριθμός των ορισμάτων εξόδου μιάς συνάρτησης.

A.3.1 Αριθμητικές πράξεις

Οι γνωστές αριθμητικές πράξεις γίνονται χρησιμοποιώντας τους τελεστές `+`, `-`, `*`, `/`.

Το γινόμενο ενός βαθμωτού `a` με ένα διάνυσμα `x` βρίσκεται με την πράξη `a*x`.

Το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων στήλης `x` και `y` βρίσκεται με την πράξη `x' * y`.

Το γινόμενο δύο διανυσμάτων `x` και `y` στοιχείο-προς-στοιχείο με αποτέλεσμα και πάλι διάνυσμα βρίσκεται με την πράξη `x .* y`.

Παρόμοια ορίζεται η διαίρεση `x ./ y` και η ύψωση σε δύναμη `x .^ y`.

A.3.2 Διάφορες συναρτήσεις

Στρογγυλοποίηση

- `round` στρογγυλοποίηση προς τον πλησιέστερο ακέραιο.
- `fix` στρογγυλοποίηση προς το μηδέν.
- `floor` στρογγυλοποίηση προς τον μικρότερο ακέραιο.
- `ceil` στρογγυλοποίηση προς τον μεγαλύτερο ακέραιο.

Προσέγγιση με ρητούς αριθμούς

- `rem` υπόλοιπο της διαίρεσης με ακεραίους.
- `rat` ανάπτυξη σε ρητούς αριθμούς.
- `rats` προσέγγιση με ρητούς αριθμούς.

Παραγοντοποίηση με ακέραιους

- `gcd` μέγιστος κοινός διαιρέτης.
- `lcm` ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο.

Μιγαδική αριθμητική

- `real` το πραγματικό μέρος ενός μιγαδικού αριθμού.
- `imag` το φανταστικό μέρος ενός μιγαδικού αριθμού.
- `conj` συζυγής ενός μιγαδικού αριθμού.
- `abs` το μέτρο ενός μιγαδικού αριθμού.
- `angle` το όρισμα ενός μιγαδικού αριθμού.

Από Καρτεσιανές συντεταγμένες σε πολικές (ή σε κυλινδρικές) : `cart2pol`.
 Από πολικές (ή σε κυλινδρικές) συντεταγμένες σε Καρτεσιανές : `pol2cart`.
 Από Καρτεσιανές συντεταγμένες σε σφαιρικές : `cart2sph`.
 Από σφαιρικές συντεταγμένες σε Καρτεσιανές : `sph2cart`.

A.3.3 Παραδείγματα

- Στοιχειώδεις συναρτήσεις

```
>> x=(1:0.1:5)';
>> y=log(x);
>> [x y]
```

- Συναρτήσεις συναρτήσεων

Να υπολογιστεί ένας πίνακας τιμών της συνάρτησης $e^{3t}\sin(5\pi t)$

```
>> t=linspace(-2,2,45)';
>> y=exp(3*t).*sin(5*pi*t);
>> [t y]
```

- Ρητές συναρτήσεις

Πίνακας τιμών της συνάρτησης $f(s) = \frac{3s^2 + 5s + 7}{s^3 + 5s^2 + 7s + 12}$ με $s = j\omega$ και $\omega \in [10^{-2}, 10^2]$.

```
>> omega=logspace(-2,2);
>> s=j*omega;
>> x1=3*s.^2+5*s+7;
>> x2=s.^3+5*s.^2+7*s+12;
>> x=x1./x2;
>> x=abs(x);
>> [s x]
```

A.3.4 Λογικοί και σχεσιακοί τελεστές

Οι γνωστοί σχεσιακοί τελεστές `<`, `<=`, `>`, `>=`, `==`, `~=`.

Οι γνωστοί λογικοί τελεστές `&`, `|`, `xor`, `~`.

Παράδειγμα

```
>> A=[1 2 3 4;5 6 7 8];
>> P=(rem(A,2)==0)
```

```
ans =
     0     1     0     1
     0     1     0     1
```

A.4 Πράξεις με Πίνακες

Οι προηγούμενες βαθμωτές συναρτήσεις είναι άμεσα διαθέσιμες και με πίνακες. Π.χ. για τον πίνακα $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ η εντολή “ $C = \exp(A)$ ” υπολογίζει τον πίνακα $C = \begin{pmatrix} e^1 & e^3 \\ e^4 & e^2 \end{pmatrix}$.

A.4.1 Ανάστροφος ενός πίνακα

`>> B=A'`

(στην πραγματικότητα ο τελεστής “ ’ ” δίνει τον ανάστροφο συζυγή).

A.4.2 Αλγεβρικές πράξεις

Οι τελεστές +, -, * ορίζονται και για πίνακες.

Ο αντίστροφος ενός πίνακα υπολογίζεται με την εντολή “ $\text{inv}(A)$ ” ή με την εντολή “ A^{-1} ”.

A.4.3 Συναρτήσεις με πίνακες

Η εντολή “ $\max(x)$ ” ($\min(x)$)” υπολογίζει το μέγιστο (ελάχιστο) ενός διανύσματος. Όταν αυτές οι εντολές χρησιμοποιούνται με πίνακες δίνουν ένα διάνυσμα με τα μέγιστα (ελάχιστα) κάθε στήλης του πίνακα. Το μέγιστο ενός πίνακα βρίσκεται με την εντολή “ $\max(\max(A))$ ”.

Η εντολή “ $\text{sort}(x)$ ” ταξινομεί ένα διάνυσμα σε αύξουσα σειρά. Η εντολή “ $[y, \text{ind}] = \text{sort}(x)$ ” επιστρέφει τους δείκτες “ ind ” του ταξινομημένου διανύσματος “ y ”.

Η εντολή “ $\text{sum}(x)$ ” υπολογίζει το άθροισμα, και η εντολή “ $\text{mean}(x)$ ” δίνει τον μέσο όρο των στοιχείων ενός διανύσματος.

Η εντολή “ $\text{rank}(A)$ ” υπολογίζει την τάξη ενός πίνακα.

Η εντολή “ $\text{det}(A)$ ” υπολογίζει την ορίζουσα ενός πίνακα.

Η εντολή “ $\text{poly}(A)$ ” υπολογίζει τους συντελεστές του χαρακτηριστικού πολυωνύμου $p(\lambda)$ του πίνακα A , όπου $p(\lambda) = |\lambda I - A|$.

Η εντολή “ $\text{trace}(A)$ ” υπολογίζει το ίχνος ενός πίνακα “ A ” (δηλ. το άθροισμα των στοιχείων της κύριας διαγωνίου του πίνακα “ A ”).

Η εντολή “ $\text{norm}(X)$ ” υπολογίζει τη νόρμα ενός πίνακα.

Η εντολή “ $\text{expm}(A)$ ” υπολογίζει το $e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$.

Παράδειγμα

Να ταξινομηθούν τα στοιχεία του πίνακα $R = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 1 \\ 3 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ ως προς την πρώτη στήλη αλλά χωρίς να χαθεί η συσχέτιση με τα στοιχεία της δεύτερης στήλης.

Προσέξτε ότι η εντολή “`A=sort (R)`” έχει σαν αποτέλεσμα $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$, οπότε χάνεται η

συσχέτιση με τα στοιχεία της δεύτερης στήλης. Ακολουθούν οι σωστές εντολές

```
>> [S, i1]=sort (R);  
>> A=R (i1 (:, 1), :);
```

που έχουν σαν αποτέλεσμα $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$.

A.4.4 Λογικές πράξεις

Η εντολή “`any (x)`”, όπου το x είναι ένα διάνυσμα με 0 και 1, επιστρέφει 1 αν τουλάχιστον ένα από τα στοιχεία του x είναι 1.

Η εντολή “`all (x)`”, όπου το x είναι ένα διάνυσμα με 0 και 1, επιστρέφει 1 αν όλα τα στοιχεία του x είναι 1.

Οι προηγούμενες εντολές ισχύουν κατά στήλη και για πίνακες, π.χ. η εντολή “`all (all (A<0.5))`” επιστρέφει 1 εάν όλα τα στοιχεία του πίνακα A είναι μικρότερα του 0.5.

Η εντολή “`find`” επιστρέφει τους δείκτες των μη-μηδενικών στοιχείων του ορίσμάτός της.

Παράδειγμα

Οι εντολές

```
>> t=0:0.005:20;  
>> y=sin (t);  
>> i=find (abs (y-0.5)<0.05);
```

επιστρέφουν τους δείκτες εκείνων των στοιχείων του διανύσματος “ y ” που απέχουν λιγότερο από 0.05 από τον αριθμό 0.5 (Πρακτικά αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να υπολογίσουμε τις τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής “ t ” των οποίων οι αντίστοιχες τιμές του “ y ” είναι 0.5).

A.5 Πολυώνυμο

Ένα πολυώνυμο ορίζεται σαν ένα διάνυσμα με φθίνουσα σειρά των συντελεστών του. Π.χ. το πολυώνυμο $p(s)=s^3+4s^2+2s+5$ ορίζεται ως “ $p=[1 \ 4 \ 2 \ 5]$ ”, ενώ το s^3+1 ορίζεται ως “[1 0 0 1]”.

A.5.1 Βασικές πράξεις

Η εντολή “`poly(A)`” υπολογίζει τους συντελεστές του χαρακτηριστικού πολυωνύμου $p(\lambda)$ του πίνακα A , όπου $p(\lambda)=|\lambda I-A|$.

Η εντολή “`poly`” χρησιμοποιείται επίσης για να υπολογίσει ένα πολυώνυμο από τις ρίζες του, π.χ. το πολυώνυμο με ρίζες τις 1, -2, j , και $-j$ υπολογίζεται με την εντολή “`poly([1, -2, j, -j])`” και δίνεται από το διάνυσμα “[1 1 -1 1 -2]”.

Η εντολή “`conv`” υπολογίζει το γινόμενο δύο πολυωνύμων, π.χ. με “ $a=[1 \ 2 \ 3]$ ” και “ $b=[4 \ 5 \ 6]$ ” η εντολή “`c=conv(a,b)`” δίνει $c=[4 \ 13 \ 28 \ 27 \ 18]$.

Οι ρίζες ενός πολυωνύμου υπολογίζονται με την εντολή “`roots(p)`”.

Η εντολή “`polyder(p)`” επιστρέφει την πρώτη παράγωγο $dp(s)/ds$ του πολυωνύμου p .

Για να αναπτύξουμε ένα ρητό πολυώνυμο $\frac{b(s)}{a(s)}$ σε μερικά κλάσματα όπως φαίνεται παρακάτω

$$\frac{b(s)}{a(s)} = \frac{r_1}{s-p_1} + \frac{r_2}{s-p_2} + \dots + \frac{r_n}{s-p_n} + k(s)$$

χρησιμοποιούμε την εντολή “`[r,p,k]=residue(b,a)`”.

A.5.2 Παρεμβολή

Δοθείσης μιας ανεξάρτητης μεταβλητής στο διάνυσμα “ x ” και των τιμών που πρόκειται να παρεμβληθούν στο διάνυσμα “ y ” η εντολή “`p=polyfit(x,y,n)`” επιστρέφει ένα πολυώνυμο n -στου βαθμού που παρεμβάλει τα ζεύγη (x_i,y_i) με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων.

Παρεμβολή μπορεί να γίνει επίσης με τις εντολές “`spline`”, “`interpft`”, “`interp1`”, “`interp2`”.

A.6 Γραφικά

A.6.1 Διδιάστατα γραφικά

Παράδειγμα

```
>> t=0:0.05:4*pi;  
>> y=sin(t);  
>> plot(t,y)
```

A.6.2 Πολλαπλά γραφικά

Παράδειγμα

```
>> t1=(0:0.1:3)';  
>> y1=sin(t1);  
>> t2=(1:0.1:4)';  
>> y2=cos(t2);  
>> plot(t1,y1,t2,y2)
```

A.6.3 Η κλίμακα των αξόνων

Η εντολή “axis([xmin xmax ymin ymax])” ορίζει τα άκρα των αξόνων x και y κατά τη σχεδίαση.

Η εντολή “axis('square')” επιβάλλει μια τετράγωνη περιοχή σχεδίασης.

Η εντολή “axis('equal')” επιβάλλει ίσες μονάδες στους δύο άξονες σχεδίασης x και y.

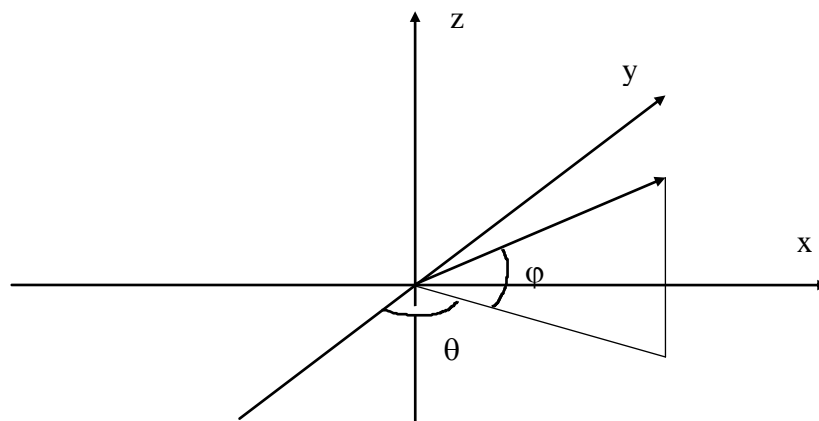
Η εντολή “grid” σχεδιάζει ένα δικτύωμα επάνω στην περιοχή σχεδίασης.

A.6.5 Τρισδιάστατα γραφικά

Παράδειγμα : Συναρτήσεις δύο Μεταβλητών

```
>> x=0:0.1:4;  
>> y=-2:0.1:1;  
>> [X,Y]=meshgrid(x,y);  
>> Z=sin(X).*cos(Y);  
>> mesh(X,Y,Z);
```

Η εντολή “view(az,el)” ορίζει τη θέση παρατηρητή, όπου az και el είναι οι γωνίες παρατήρησης azimuth και elevation όπως φαίνονται στο παρακάτω σχήμα. Αρχικά είναι $az=\theta=-37.5^\circ$ και $el=\phi=30^\circ$.



A.7 Προγραμματισμός στο MATLAB

A.7.1 Βασικές δομές

Η επιλογή στο MATLAB καθορίζεται ως εξής

```
if συνθήκη,  
    (σύνολο εντολών 1)  
elseif συνθήκη,  
    (σύνολο εντολών 2)  
else  
    (σύνολο εντολών 3)  
    •  
    •  
end
```

Η επανάληψη στο MATLAB καθορίζεται με δύο τρόπους

1.

```
for i=1:n,  
    (σύνολο εντολών)  
end
```
2.

```
while συνθήκη  
    (σύνολο εντολών)  
end
```

A.7.2 Αρχεία γραφής

Παράδειγμα

```
% An M-file to compute the Fibonacci numbers  
f=[1 1]; i=1;  
while f(i)+f(i+1)<1000  
    f(i+2)=f(i)+f(i+1);  
    i=i+1;  
end  
plot(f)
```

A.7.3 Συναρτήσεις

Μια συνάρτηση δημιουργείται όπως ένα αρχείο γραφής (script file) αλλά αρχίζει πάντοτε με την εξής σειρά

`function [output variables]=FunctionName(input variables)`

Παράδειγμα

```
function t = trace(a)  
% TRACE    Sum of diagonal elements,  
% TRACE(A) is the sum of the diagonal elements of A,  
% which is also the sum of the eigenvalues of A.  
  
t =sum(diag(a));
```

A.8 Αριθμητική Ανάλυση

Θεωρείστε τη συνάρτηση

$$humps(x) = \frac{1}{(x-0.3)^2 + 0.01} + \frac{1}{(x-0.9)^2 + 0.04} - 6$$
 της οποίας το αρχείο είναι

```
function y = humps(x)
y=1./((x-0.3).^2+0.01) + 1./((x-0.9).^2+0.04) - 6;
```

και της οποίας το γράφημα λαμβάνεται με τις εντολές

```
x=-1:0.01:2;
plot(x,humps(x))
```

A.8.1 Απειροστική ανάλυση

Η εντολή “diff” υπολογίζει τη διαφορά μεταξύ διαδοχικών στοιχείων ενός διανύσματος, π.χ. “diff(x)=[x(2)-x(1), x(3)-x(2), ..., x(n)-x(n-1)]”.

Η εντολή “Dy=diff(y)./diff(x)” υπολογίζει την πρώτη παράγωγο.

Η εντολή “s=quad('humps',0,1)” υπολογίζει το ολοκλήρωμα της *humps* μεταξύ 0 και 1. (Υπολογίστηκε να είναι quad('humps',0,1)=29.858...).

A.8.2 Μη-γραμμικές εξισώσεις και βελτιστοποίηση

Η εντολή “fzero('FunctionName',x0)” υπολογίζει το πραγματικό (μη μιγαδικό) μηδενικό της συνάρτησης 'FunctionName' κοντύτερα στο x0.

Παράδειγμα

```
>> xz1=fzero('humps',0)
>> xz2=fzero('humps',1)
```

(Το xz1 ισούται με -0.131..., και το xz2 ισούται με 1.299...)

Ο υπολογισμός του τοπικού ελάχιστου μιας συνάρτησης με μία μεταβλητή γίνεται με την εντολή “x=fminbnd('FunctionName',x1,x2)”.

Παράδειγμα (υπολογισμός του αριθμού π)

```
>> pic= fminbnd ('cos',3,4)
```

Στη συνέχεια παρουσιάζονται συγκεκριμένα υπολογιστικά παραδείγματα σε MATLAB.

B Υπολογιστικά Παραδείγματα

Αυτή η ενότητα παρουσιάζει παραδείγματα λογισμικού εφαρμογών σε MATLAB.

B.1 Λογισμικό Κεφαλαίου 1

Όπως έχει ήδη αναφερθεί στο Κεφάλαιο 1, ένα νευρωνικό δίκτυο υλοποιεί μία συνάρτηση $y = f(\mathbf{x})$. Στην παράγραφο αυτή θα παρουσιαστούν δύο κώδικες (βλ. λογισμικό) εφαρμογής των **προσωτροφοδοτούμενων** νευρωνικών δικτύων. Συγκεκριμένα, ο «Κώδικας 1» σε MATLAB, υλοποιεί ένα νευρωνικό δίκτυο για την προσέγγιση της μαθηματικής συνάρτησης του ημιτόνου $y = \sin(x)$. Στην περίπτωση αυτή το νευρωνικό δίκτυο έχει μία είσοδο, μία έξοδο, ένα κρυφό στρώμα, ενώ ο αριθμός (50) των νευρώνων του κρυφού στρώματος αποφασίζεται μετά από δοκιμές.

Ο «Κώδικας 2» σε MATLAB, υλοποιεί ένα προσωτροφοδοτούμενο νευρωνικό δίκτυο για την ταξινόμηση τριών ειδών λουλουδιών [1], η οποία (ταξινόμηση) αποτελεί μία τυπική εφαρμογή *αναγνώρισης προτύπων*. Συγκεκριμένα, για την ταξινόμηση των λουλουδιών χρησιμοποιούνται τέσσερα *χαρακτηριστικά*, τα οποία περιλαμβάνουν το μήκος και το πλάτος των φύλλων καθώς και το μήκος και το πλάτος των πετάλων, ενώ το σύνολο των δεδομένων περιλαμβάνει 50 δείγματα από κάθε είδος λουλουδιού, δηλαδή συνολικά περιλαμβάνει 150 δείγματα. Σε αυτή την περίπτωση το νευρωνικό δίκτυο έχει τέσσερις εισόδους (το πλήθος των *χαρακτηριστικών*), τρεις εξόδους (ο αριθμός των ειδών λουλουδιών), δύο κρυφά στρώματα με αριθμό (20 έκαστο) νευρώνων που επιλέγεται μετά από δοκιμές.

Σημειώστε ότι ενώ, από τη μια μεριά, ο αριθμός εισόδων και εξόδων του νευρωνικού δικτύου προκύπτει άμεσα από το προς επίλυση πρόβλημα, από την άλλη μεριά, ο αριθμός των κρυφών στρωμάτων καθώς και ο αριθμός των νευρώνων του κάθε στρώματος επιλέγονται μετά από δοκιμές διότι, μέχρι στιγμής, δεν υπάρχει κάποιο αδιαμφισβήτητο κριτήριο επιλογής αυτών.

Κώδικας 1	<i>Εφαρμογή προσέγγισης μίας συνάρτησης.</i>
------------------	---

```
%% Αρχικοποίηση του περιβάλλοντος MATLAB
clear all;
close all;
clc;

%% Κατασκευή των δεδομένων εκπαίδευσης (training data)
x_train = 0:pi/16:2*pi;
y_train = sin(x_train);
plot(x_train, y_train);%Προβολή των δεδομένων εκπαίδευσης

%% Κατασκευή των δεδομένων δοκιμής (testing data)
x_test = 0:pi/7:2*pi;
y_test = sin(x_test);

%% Κατασκευή ενός feedforward νευρωνικού δικτύου (1 κρυφό
στρώμα 50 νευρώνων)
net = newff(x_train,y_train,50);

%% Εκπαίδευση του νευρωνικού δικτύου
net = train(net,x_train,y_train);

%% Υπολογισμός των εξόδων του νευρωνικού δικτύου, με εισόδους
τα δεδομένα
%δοκιμής
y_net = net(x_test);

%% Προβολή της εξόδου του νευρωνικού δικτύου σε σύγκριση με
την επιθυμητή
%έξοδο
figure;
plot(x_train,y_train,x_test,y_test,'--r');
legend('Training Sine','Simulated Sine');
```

Κώδικας 2	<i>Εφαρμογή αναγνώρισης προτύπων.</i>
------------------	--

```
%% Αρχικοποίηση του περιβάλλοντος MATLAB
clear all;
close all;
clc;

%% Εισαγωγή δεδομένων iris data
load fisheriris

%% Κατασκευή των προτύπων
y = zeros(3,length(species));
y(1,1:50) = 1;
y(2,51:100) = 1;
y(3,101:150) = 1;

%% Κατασκευή δεδομένων εκπαίδευσης (70%) και δοκιμής (30%)
inds = randperm(size(meas,1));
x_train = meas(inds(1:70),1:2)';
y_train = y(:,inds(1:70));
x_test = meas(inds(71:end),1:2)';
y_test = y(:,inds(71:end));

%% Κατασκευή ενός feedforward νευρωνικού δικτύου (2 κρυφά
στρώματα των 20 νευρώνων)
net = newff(x_train,y_train,[20 20]);

%% Εκπαίδευση του νευρωνικού δικτύου
net = train(net,x_train,y_train);

%% Υπολογισμός των εξόδων του νευρωνικού δικτύου, με εισόδους
τα δεδομένα
%δοκιμής
y_net = net(x_test);

%% Υπολογισμός της απόδοσης ταξινόμησης
[vals1,y_labels] = max(y_test);
[vals2,y_net_labels] = max(y_net);
cp = classperf(y_labels, y_net_labels);

%% Εκτύπωση της ποσοστιαίας ακρίβειας ταξινόμησης
disp(['Classification Rate(%) = '
num2str(cp.CorrectRate*100)]);
```

B.2 Λογισμικό Κεφαλαίου 2

Στην παράγραφο αυτή παρουσιάζονται οι υλοποιήσεις δύο διαφορετικών τύπων ασαφών μοντέλων. Συγκεκριμένα, το πρώτο ασαφές μοντέλο είναι τύπου Mamdani, το οποίο υλοποιείται με τον «Κώδικα 3» σε MATLAB και ρυθμίζει την ταχύτητα περιστροφής ενός ανεμιστήρα στο θάλαμο εντατικής παρακολούθησης ενός νοσοκομείου, ώστε η θερμοκρασία και η σχετική υγρασία του θαλάμου να διατηρούνται σε επίπεδα σύμφωνα με τις υποδείξεις των γιατρών. Υπάρχει αισθητήρας θερμοκρασίας που μετράει τη θερμοκρασία από 0 °C έως 50 °C, καθώς και αισθητήρας που μετράει τη σχετική υγρασία από 20% έως 100%. Η ταχύτητα περιστροφής του ανεμιστήρα κυμαίνεται από 120 έως 1200 RPM (Rotations Per Minute). Οι γιατροί έχουν ορίσει τις παρακάτω 5 προδιαγραφές.

	Θερμοκρασία	Σχετική Υγρασία	Επιθυμητή ταχύτητα περιστροφής ανεμιστήρα.
1	8	20	300
2	15	40	400
3	21	50	600
4	32	70	1000
5	41	90	900

Το δεύτερο ασαφές μοντέλο είναι τύπου Sugeno, το οποίο υλοποιείται με τον «Κώδικα 4» σε MATLAB και ρυθμίζει την παραγόμενη χημική ουσία PAC σε μια βιομηχανική διαδικασία καθαρισμού νερού με βάση δύο μετρήσιμες μεταβλητές εισόδου: 1) το PH του νερού, και 2) η αλκαλικότητα AL του νερού, οι οποίες καθορίζουν την ποσότητα της χημικής ουσίας PAC που θα χρησιμοποιηθεί για τον καθαρισμό μιας ποσότητας νερού. Έστω x_1 η μετρούμενη αριθμητική τιμή του PH, x_2 η μετρούμενη αριθμητική τιμή του AL, και y η (υπολογισμένη) αριθμητική τιμή της PAC που πρέπει να χρησιμοποιηθεί για τον καθαρισμό μιας ποσότητας νερού. Θα χρησιμοποιηθούν οι παρακάτω τρεις κανόνες:

K1. Εάν PH είναι «κανονικό» και AL είναι «χαμηλό» τότε $y = 2x_1 + x_2 + 1$.

K2. Εάν PH είναι «υψηλό» και AL είναι «μέτριο» τότε $y = x_1 + 2x_2 + 3$.

K3. Εάν PH είναι «χαμηλό» και AL είναι «μέτριο» τότε $y = 2x_1 + 3x_2 - 1$.

Σημειώστε ότι οι τιμές «κανονικό», «υψηλό», «χαμηλό» και «μέτριο», τις οποίες λαμβάνουν οι ασαφείς μεταβλητές PH και AL, είναι ασαφείς αριθμοί με τριγωνικές συναρτήσεις συμμετοχής. Επιπλέον, σημειώστε ότι τα πεδία τιμών των μεταβλητών PH, AL και PAC είναι [6,8], [40,60] και [50,200], αντίστοιχα.

```
%% Αρχικοποίηση του περιβάλλοντος MATLAB
clear all;
close all;
clc;

%% Δημιουργία ασαφούς μοντέλου τύπου Mamdani
model = newfis('MamModel','mamdani');

%% Ορισμός εισόδων, εξόδων του συστήματος
model = addvar(model,'input','temp',[0 50]);
model = addvar(model,'input','hum',[20 100]);
model = addvar(model,'output','speed',[120 1200]);

%% Ορισμός των συναρτήσεων συμμετοχής
model = addmf(model,'input',1,'low','gaussmf',[7.5 0]);
model = addmf(model,'input',1,'medium','gaussmf',[7.5 25]);
model = addmf(model,'input',1,'high','gaussmf',[7.5 50]);
model = addmf(model,'input',2,'low','gaussmf',[10 20]);
model = addmf(model,'input',2,'medium','gaussmf',[10 60]);
model = addmf(model,'input',2,'high','gaussmf',[10 100]);
model = addmf(model,'output',1,'low','gaussmf',[120 120]);
model = addmf(model,'output',1,'medium','gaussmf',[120 660]);
model = addmf(model,'output',1,'high','gaussmf',[120 1200]);

% Προβολή των συναρτήσεων συμμετοχής
subplot(1,3,1);plotmf(model,'input',1);
subplot(1,3,2);plotmf(model,'input',2);
subplot(1,3,3);plotmf(model,'output',1);

%% Ορισμός των κανόνων
rule1 = [1 1 1 1 1];
rule2 = [2 2 2 1 1];
rule3 = [2 2 3 1 1];
rule4 = [3 3 3 1 1];
ruleList = [rule1;rule2;rule3;rule4];
model = addrule(model,ruleList);

%Προβολή των κανόνων
showrule(model)

%% Προβολή του συστήματος
figure;
plotfis(model);

%% Λειτουργία του συστήματος
inputs = [8 20];
outputs = evalfis(inputs,model)
```

Κώδικας 4	Εφαρμογή ασαφούς μοντέλου τύπου Sugeno.
------------------	--

```
% Αρχικοποίηση του περιβάλλοντος MATLAB
clear all;
close all;
clc;

% Δημιουργία ασαφούς μοντέλου τύπου Mamdani
model = newfis('SugModel','sugeno');

% Ορισμός εισόδων, εξόδων του συστήματος
model = addvar(model,'input','PH',[6 8]);
model = addvar(model,'input','AL',[40 60]);
model = addvar(model,'output','PAC',[50 200]);

% Ορισμός των συναρτήσεων συμμετοχής
model = addmf(model,'input',1,'low','trimf',[4.2 6 6.8]);
model = addmf(model,'input',1,'medium','trimf',[6.2 7 7.8]);
model = addmf(model,'input',1,'high','trimf',[7.2 8 9.8]);
model = addmf(model,'input',2,'low','trimf',[32 40 48]);
model = addmf(model,'input',2,'medium','trimf',[42 50 58]);
model = addmf(model,'input',2,'high','trimf',[52 60 68]);
model = addmf(model,'output',1,'low','linear',[2 1 1]);
model = addmf(model,'output',1,'medium','linear',[1 2 3]);
model = addmf(model,'output',1,'high','linear',[2 3 -1]);

% Προβολή των συναρτήσεων συμμετοχής
subplot(1,2,1);plotmf(model,'input',1);
subplot(1,2,2);plotmf(model,'input',2);

% Ορισμός των κανόνων
rule1 = [2 1 1 1 1];
rule2 = [3 2 2 1 1];
rule3 = [1 2 3 1 1];
ruleList = [rule1;rule2;rule3];
model = addrule(model,ruleList);

% Προβολή των κανόνων
showrule(model)

% Προβολή του συστήματος
figure;
plotfis(model);

% Λειτουργία του συστήματος
inputs = [7 40];
outputs = evalfis(inputs, model)
```

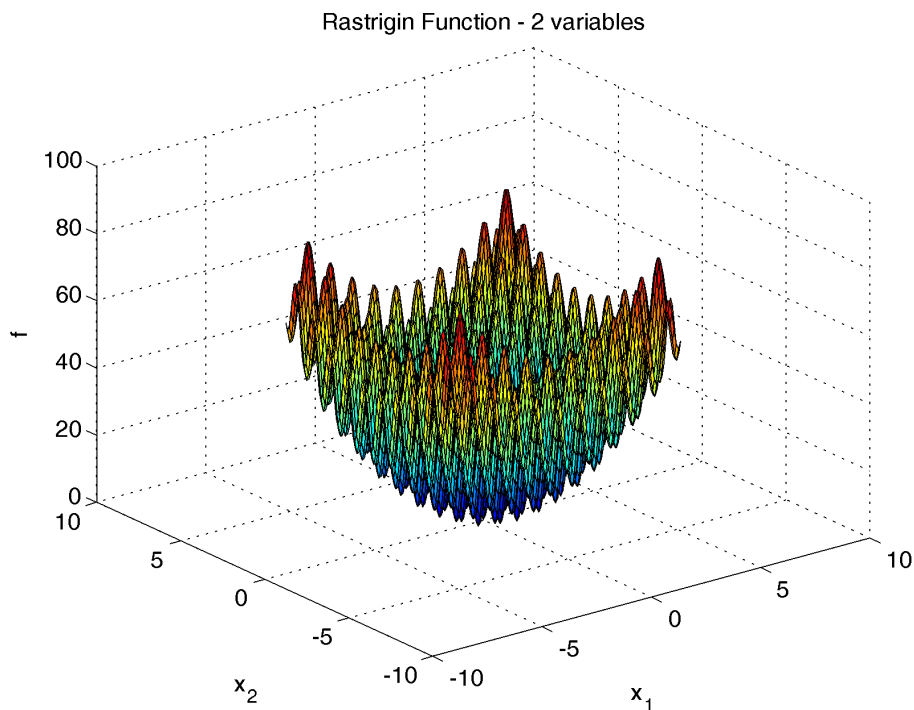

B.3 Λογισμικό Κεφαλαίου 3

Για την μελέτη της συμπεριφοράς αλγορίθμων βελτιστοποίησης αναπτύχθηκαν δύο κώδικες βελτιστοποίησης της ακόλουθης συνάρτησης Rastrigin δύο μεταβλητών ($n = 2$):

$$f(\mathbf{x}) = 10 \cdot n + \sum_{i=1}^n (x_i^2 - 10 \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot x_i)) \quad -5.12 \leq x_i \leq 5.12$$

Ολικό ελάχιστο : $x_i = 0$ $f(\mathbf{x}) = 0$

Η συνάρτηση Rastrigin (βλ. Σχήμα A.1) παρουσιάζει πολλαπλά τοπικά ελάχιστα, ενώ το ολικό ελάχιστο είναι $f(\mathbf{x}) = 0$ για $\mathbf{x} = 0$.



Σχήμα A.1 Η συνάρτηση Rastrigin δύο μεταβλητών.

Για την βελτιστοποίηση (βλ. εύρεση ελάχιστου) της συνάρτησης Rastrigin, πρώτον, εφαρμόζεται ένας Γενετικός Αλγόριθμος (ΓΑ), ο οποίος υλοποιείται με τον «Κώδικα 5» σε MATLAB και, δεύτερον, εφαρμόζεται η μέθοδος Βελτιστοποίησης με Σμήνος Σωματιδίων (ΒΣΣ), η οποία υλοποιείται με τον «Κώδικα 6» σε MATLAB. Σημειώστε ότι ο «Κώδικας 6» διατίθεται δωρεάν [2].

Κώδικας 5	<i>Εφαρμογή βελτιστοποίησης (βλ. εύρεση ελάχιστου) της συνάρτησης Rastrigin με χρήση Γενετικού Αλγόριθμου (ΓΑ).</i>
------------------	--

```

%% Αρχικοποίηση του περιβάλλοντος MATLAB
clear all;
close all;
clc;

%% Ρυθμίσεις του προβλήματος
nVar = 2; %Πλήθος αγνώστων
LB = -5.12*ones(1,nVar); %Ελάχιστη τιμή των αγνώστων
UB = 5.12*ones(1,nVar); %Μέγιστη τιμή των αγνώστων
CostFunction = @(x)rastriginsfcn(x); %Συνάρτηση
κόστους/αντικειμενική

%% Ρυθμίσεις του Γενετικού Αλγορίθμου
nPop = 50; %Μέγεθος πληθυσμού
MaxIt = 50; %Αριθμός γενεών
options =
gaoptimset('PopulationSize',nPop,'PopInitRange',[LB;UB],'Elite
Count',2,'CrossoverFraction',0.8,'Generations',MaxIt,'PlotFcns
',{'@gaplotbestf});

%% Εκτέλεση του Γενετικού Αλγόριθμου
[x, fval, exitflag, output] =
ga(CostFunction,nVar,[],[],[],[],LB,UB,[],options);

%% Προβολή βέλτιστης λύσης
disp(['Minimum = ' num2str(fval) ' for x1=' num2str(x(1)) '
x2=' num2str(x(2))]);

```

Κώδικας 6	<i>Εφαρμογή βελτιστοποίησης (βλ. έρεση ελάχιστου) της συνάρτησης Rastrigin με την χρήση Βελτιστοποίησης Σμήνους Σωματιδίων (BSS).</i>
------------------	---

```

% Copyright (c) 2015, Yarpiz (www.yarpiz.com)
% All rights reserved. Please read the "license.txt" for
license terms.
%
% Project Code: YPEA102
% Project Title: Implementation of Particle Swarm Optimization
in MATLAB
% Publisher: Yarpiz (www.yarpiz.com)
%
% Developer: S. Mostapha Kalami Heris (Member of Yarpiz Team)
%
% Contact Info: sm.kalami@gmail.com, info@yarpiz.com
%

clc;
clear;
close all;

%% Problem Definition

CostFunction=@(x) rastrigin(x);          % Cost Function

nVar=2;          % Number of Decision Variables

VarSize=[1 nVar]; % Size of Decision Variables Matrix

VarMin=-5.12;   % Lower Bound of Variables
VarMax= 5.12;   % Upper Bound of Variables

%% PSO Parameters

MaxIt=50;      % Maximum Number of Iterations

nPop=50;      % Population Size (Swarm Size)

% PSO Parameters
w=1;          % Inertia Weight
wdamp=0.99;   % Inertia Weight Damping Ratio
c1=1.5;       % Personal Learning Coefficient
c2=2.0;       % Global Learning Coefficient

% If you would like to use Constriction Coefficients for PSO,

```

```

% uncomment the following block and comment the above set of
parameters.

% % Constriction Coefficients
% phi1=2.05;
% phi2=2.05;
% phi=phi1+phi2;
% chi=2/(phi-2+sqrt(phi^2-4*phi));
% w=chi;           % Inertia Weight
% wdamp=1;        % Inertia Weight Damping Ratio
% c1=chi*phi1;    % Personal Learning Coefficient
% c2=chi*phi2;    % Global Learning Coefficient

% Velocity Limits
VelMax=0.1*(VarMax-VarMin);
VelMin=-VelMax;

%% Initialization

empty_particle.Position=[];
empty_particle.Cost=[];
empty_particle.Velocity=[];
empty_particle.Best.Position=[];
empty_particle.Best.Cost=[];

particle= repmat(empty_particle,nPop,1);

GlobalBest.Cost=inf;

for i=1:nPop

    % Initialize Position
    particle(i).Position=unifrnd(VarMin,VarMax,VarSize);

    % Initialize Velocity
    particle(i).Velocity=zeros(VarSize);

    % Evaluation
    particle(i).Cost=CostFunction(particle(i).Position);

    % Update Personal Best
    particle(i).Best.Position=particle(i).Position;
    particle(i).Best.Cost=particle(i).Cost;

    % Update Global Best
    if particle(i).Best.Cost<GlobalBest.Cost

        GlobalBest=particle(i).Best;
    end
end
end

```

```

BestCost=zeros (MaxIt,1);

%% PSO Main Loop

for it=1:MaxIt

    for i=1:nPop

        % Update Velocity
        particle(i).Velocity = w*particle(i).Velocity ...
            +c1*rand(VarSize).* (particle(i).Best.Position-
particle(i).Position) ...
            +c2*rand(VarSize).* (GlobalBest.Position-
particle(i).Position);

        % Apply Velocity Limits
        particle(i).Velocity =
max(particle(i).Velocity,VelMin);
        particle(i).Velocity =
min(particle(i).Velocity,VelMax);

        % Update Position
        particle(i).Position = particle(i).Position +
particle(i).Velocity;

        % Velocity Mirror Effect
        IsOutside=(particle(i).Position<VarMin |
particle(i).Position>VarMax);
        particle(i).Velocity(IsOutside)=-
particle(i).Velocity(IsOutside);

        % Apply Position Limits
        particle(i).Position =
max(particle(i).Position,VarMin);
        particle(i).Position =
min(particle(i).Position,VarMax);

        % Evaluation
        particle(i).Cost = CostFunction(particle(i).Position);

        % Update Personal Best
        if particle(i).Cost<particle(i).Best.Cost

            particle(i).Best.Position=particle(i).Position;
            particle(i).Best.Cost=particle(i).Cost;

        % Update Global Best
        if particle(i).Best.Cost<GlobalBest.Cost

            GlobalBest=particle(i).Best;

```

```

        end

    end

end

BestCost(it)=GlobalBest.Cost;

disp(['Iteration ' num2str(it) ': Best Cost = '
num2str(BestCost(it))]);

w=w*wdamp;

end

BestSol = GlobalBest;

%% Results

figure;
%plot(BestCost,'LineWidth',2);
semilogy(BestCost,'LineWidth',2);
xlabel('Iteration');
ylabel('Best Cost');
grid on;

disp(['Minimum = ' num2str(GlobalBest.Cost) ' for x1='
num2str(GlobalBest.Position(1)) ' x2='
num2str(GlobalBest.Position(1))]);

```

B.4 Λογισμικό Κεφαλαίου 9

Στη συνέχεια παρουσιάζεται ο «Κώδικας 7» σε MATLAB για τον υπολογισμό ενός ΑΔ από μια κατανομή (αριθμητικών) δειγμάτων. Συγκεκριμένα, ακριβώς κάτω από το σχόλιο “Preprocessing: Load the data” γίνεται η φόρτωση των (αριθμητικών) δειγμάτων από το αρχείο “area20050301_7a.txt” στην μεταβλητή (διάνυσμα) “population1”. Κατόπιν υπολογίζεται, πρώτον, ένας ΑΔ σε μορφή αναπαράστασης-συνάρτησης-συμμετοχής με την ρουτίνα “fin(population)” και αποθηκεύεται στις μεταβλητές “pts1” (τετμημένες) και “val1” (τεταγμένες) και, δεύτερον, υπολογίζεται ο προαναφερθείς ΑΔ σε μορφή αναπαράστασης-διαστημάτων με την ρουτίνα “in(pts1,val1,L)” σε $L=32$ διαστήματα για ισαπέχουσες τιμές στο διάστημα τετμημένων $[0,1]$.

Το λογισμικό ακριβώς κάτω από το σχόλιο “plot a population as a histogram” στον «Κώδικα 7» τυπώνει το (μη-κυρτό) ιστόγραμμα που φαίνεται στο Σχήμα A.2(α). Το λογισμικό ακριβώς κάτω από το σχόλιο “plot a population as a IN membership function” στον «Κώδικα 7» τυπώνει τον ΑΔ που φαίνεται στο Σχήμα A.2(β), ο οποίος έχει αναπαράσταση-συνάρτησης-συμμετοχής πάντα κυρτή εκ κατασκευής. Τέλος, το λογισμικό ακριβώς κάτω από το σχόλιο “plot a population as a IN set of a-cuts” στον «Κώδικα 7» τυπώνει στο Σχήμα A.2(γ) τον προαναφερθέντα ΑΔ σε μορφή αναπαράστασης-διαστημάτων.

Ο «Κώδικας 8» σε MATLAB υπολογίζει έναν ΑΔ από αριθμητικά δείγματα, τα οποία βρίσκονται αποθηκευμένα στο διάστημα “x”. Συγκεκριμένα, υπολογίζεται ένας ΑΔ σε μορφή αναπαράστασης-συνάρτησης-συμμετοχής με τις τετμημένες να τοποθετούνται στο διάστημα “pts” και τις τεταγμένες να τοποθετούνται στο διάστημα “val”. Σημειώστε ότι ο «Κώδικας 8» υλοποιεί μια μορφή του αλγόριθμου CALCIN.

Ο «Κώδικας 9» σε MATLAB υπολογίζει έναν ΑΔ, από μορφή αναπαράστασης-συνάρτησης-συμμετοχής με τετμημένες αποθηκευμένες στο διάνυσμα “pts” και τεταγμένες αποθηκευμένες στο διάνυσμα “val”, σε μορφή αναπαράστασης-διαστημάτων σε L διαστήματα (α -διατομές) για ισαπέχουσες τιμές στο διάστημα τετμημένων $[0,1]$.

```
clear all
clc

%Preprocessing: Load the data

load area20050301_7a.txt
population1= area20050301_7a;
step= 2;
width= 50;

[pts1, vall] = fin(population1);

L= 32;
[level, acuts1]= in(pts1, vall, L);

whitebg('w')
figure(1)

%plot a population as a histogram

CDF= [];
for i = 0:1:width/step,
    CDF= [CDF; sum(pts1<i*step)];
end
CDF;
dif= diff(CDF);
ppdf= (dif/max(CDF));

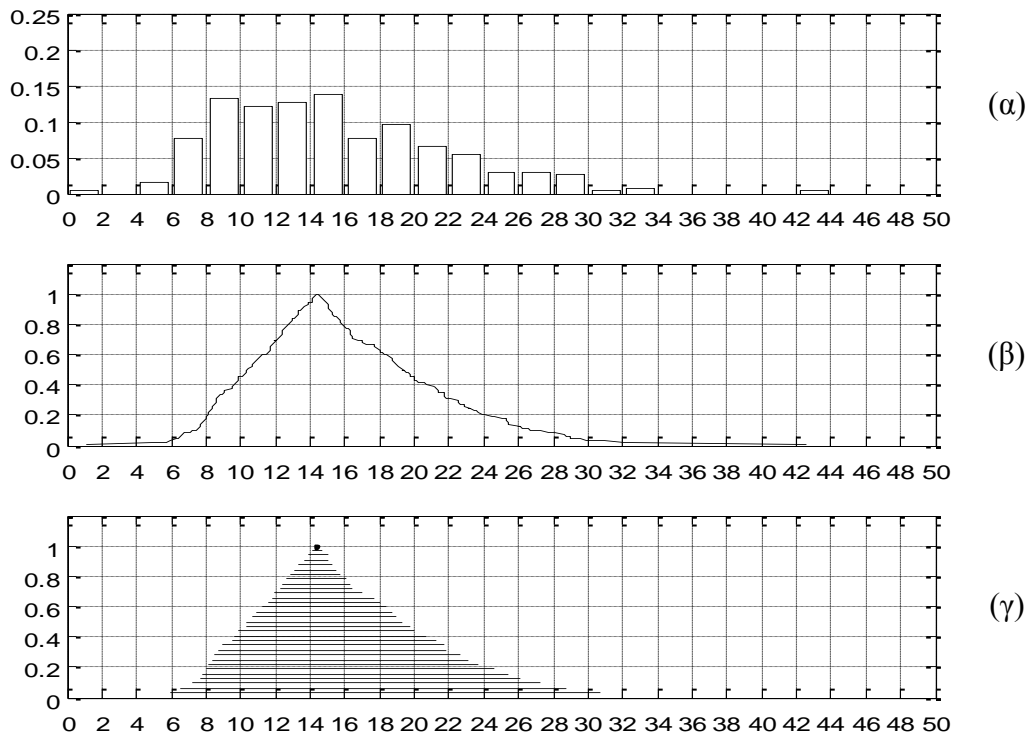
subplot(3,1,1);
x= step:step:width;
bar(x-step/2,ppdf,0.8,'w');
grid;
axis([0 width 0 0.25]);
set(gca,'XTick',[0:step:width]);
set(gca,'YTick',0:0.05:0.25);

%plot a population as a IN membership function

subplot(3,1,2);
plot(pts1,vall,'k-');
grid;
axis([0 width 0 1.2]);
set(gca,'XTick',[0:step:width]);
set(gca,'YTick',0:0.2:1);

%plot a population as a IN set of a-cuts

subplot(3,1,3);
for i = 1:L,
    plot([acuts1(i,1) acuts1(i,2)], [level(i) level(i)], 'k-');
    hold on;
%    grid;
end
grid;
axis([0 width 0 1.2]);
set(gca,'XTick',[0:step:width]);
set(gca,'YTick',0:0.2:1);
```

Σχήμα Α.2 (α) Το (μη-κυρτό) ιστόγραμμα μιας κατανομής δειγμάτων.

(β) Αναπαράσταση-συνάρτησης-συμμετοχής (πάντα κυρτή, εκ κατασκευής) ενός ΑΔ, ο οποίος υπολογίστηκε από την παραπάνω κατανομή σύμφωνα με τον αλγόριθμο CALCIN.

(γ) Αναπαράσταση-διαστημάτων του προαναφερθέντος ΑΔ.

Κώδικας 8

Μια υλοποίηση του αλγόριθμου CALCIN για τον υπολογισμό ενός ΑΔ από μια κατανομή (αριθμητικών) δειγμάτων.

```
function [pts, val] = fin(x)
% [pts, val] = fin(x) computes a FIN out of a (real number) data population vector
%'x'
%           Column vector 'pts' returns the (FIN's) domain points
%           Column vector 'val' returns the values on the aforementioned
domain points

% Define a constant
%
epsilon= 0.000001; %a small positive number used to produce (by addition) nearby
copies of identical numbers

% The following lines "arrange" such that there are no identical points in vector
%'x'
% by adding a small positive (real) number where appropriate
%
x= sort(x);
if min(abs(diff(x))) == 0, %condition for identifying identical numbers
    for i=1:length(x),
        j= i+1;
        while (j <= length(x)&(x(i) == x(j)),
            x(j)= x(i) + epsilon;
            j= j+1;
        end %while
    end %for
end %if

% In the following lines the FIN which corresponds to vector 'x' is calculated
%
pts= [median(x)];
x_left= x(find(x<median(x)));
x_right= x(find(x>median(x)));
data=[x_left; x_right];

while length( data(1,:) ) ~= 1,
    [M,N]= size(data);
    rslt= [];
    for i=1:M,
        x= data(i,:);
        pts= [pts; median(x)];
        x_left= x(find(x<median(x)));
        x_right= x(find(x>median(x)));
        rslt=[rslt; x_left; x_right];
    end
    data= rslt;
end

pts= [pts; data];
pts= sort(pts);

step= power(2, -(log2(length(pts)+1)-1) );
val= [];
for i= 1:ceil(length(pts)/2),
    val= [val; i*step];
end
flipped= flipud(val);
val= [val; flipped(2:length(flipped),:)];
```

Κώδικας 9

Υπολογισμός ενός ΑΔ σε μορφή αναπαράστασης-διαστημάτων από τον (ίδιο) ΑΔ σε μορφή αναπαράστασης-συνάρτησης-συμμετοχής.

```
function [level, acuts] = in(pts, val, L)
% [level, acuts] = in(pts, val, L) computes a IN in terms of its acuts ([ah, bh])
per level
%
% Column vector 'pts' includes the x-values of a
FIN membership function
% Column vector 'val' includes the y-values of a
FIN membership function
% Integer number 'L' is the number of a-cut levels

epsilon = 0.000001;

%preprocess so as to create the desired a-cut levels
dmy= linspace(0,1,1+L)';
level= dmy(2:1:1+L);

%if necessary, we augment vectors pts and val at both ends, so as
%the corresponding IN starts from zero
if val(1)> 0
    dmy1= pts(1) - (pts(2)-pts(1))*val(1)/(val(2)-val(1));
    n= length(pts);
    dmy2= pts(n) + (pts(n)-pts(n-1))*val(n)/(val(n-1)-val(n));

    pts= [dmy1; pts; dmy2];
    val= [0; val; 0];
end

%it follows the main loop that computes a-cuts, one at a loop
acuts = [];
for i = 1:1:L,
    indices= find(level(i)-epsilon <= val);
    minIndex= min(indices);
    maxIndex= max(indices);

    ah= pts(minIndex) - (pts(minIndex)-pts(minIndex-1))*(val(minIndex)-
level(i))/(val(minIndex)-val(minIndex-1));
    bh= pts(maxIndex) + (pts(maxIndex+1)-pts(maxIndex))*(val(maxIndex)-
level(i))/(val(maxIndex)-val(maxIndex+1));
    acuts= [acuts; ah bh];
end
```

Από την ανάλυση στο Επίπεδο-1, αναφορικά με το πλέγμα (I_1, Ξ) των διαστημάτων T_1 , γνωρίζουμε ότι μια μετρική (συνάρτηση) δίδεται από την Εξ.(9.1): $d_1([a,b],[c,e]) = [\nu(\theta(a \wedge c)) - \nu(\theta(a \vee c))] + [\nu(b \vee e) - \nu(b \wedge e)] = d(\theta(a), \theta(c)) + d(b, e)$. Μια επιλογή του ζεύγους συναρτήσεων $\theta(\cdot)$ και $\nu(\cdot)$ είναι $\theta(x) = -x$ και $\nu(\cdot)$ έτσι ώστε $\nu(x) = -\nu(-x)$, οπότε προκύπτει η L_1 (Hamming) μετρική $d_1([a,b],[c,e]) = |a-c| + |b-e|$. Συνεπώς, η απόσταση μεταξύ των τετριμμένων διαστημάτων $[a,a]$ και $[b,b]$, τα οποία αναπαριστούν τους αριθμούς a και b , υπολογίζεται να είναι $d_1([a,a],[b,b]) = |a-b| + |a-b| = 2|a-b|$. Προκειμένου η συνάρτηση $d_1(\cdot, \cdot)$ να υπολογίζει την (αναμενόμενη) απόσταση $|a-b|$ μεταξύ των αριθμών a και b μπορούμε να εισάγουμε τον συντελεστή 0.5 στην Εξ.(9.1). Προφανώς, η χρήση της εξίσωσης $d_1([a,b],[c,e]) = 0.5[d(\theta(a), \theta(c)) + d(b, e)]$ μπορεί να γενικευτεί για μη-τετριμμένα διαστήματα $[a,b]$ και $[c,e]$ καθώς και για επιτρεπτές συναρτήσεις $\theta(x) \neq -x$ και $\nu(x) \neq -\nu(-x)$.

Έστω τα ακόλουθα τρία ζεύγη ΑΔ: E_1 και E_2 , F_1 και F_2 , G_1 και G_2 με συναρτήσεις βαθμού συμμετοχής σχήματος ισοσκελών τριγώνων όπως φαίνεται στο Σχήμα Α.3.

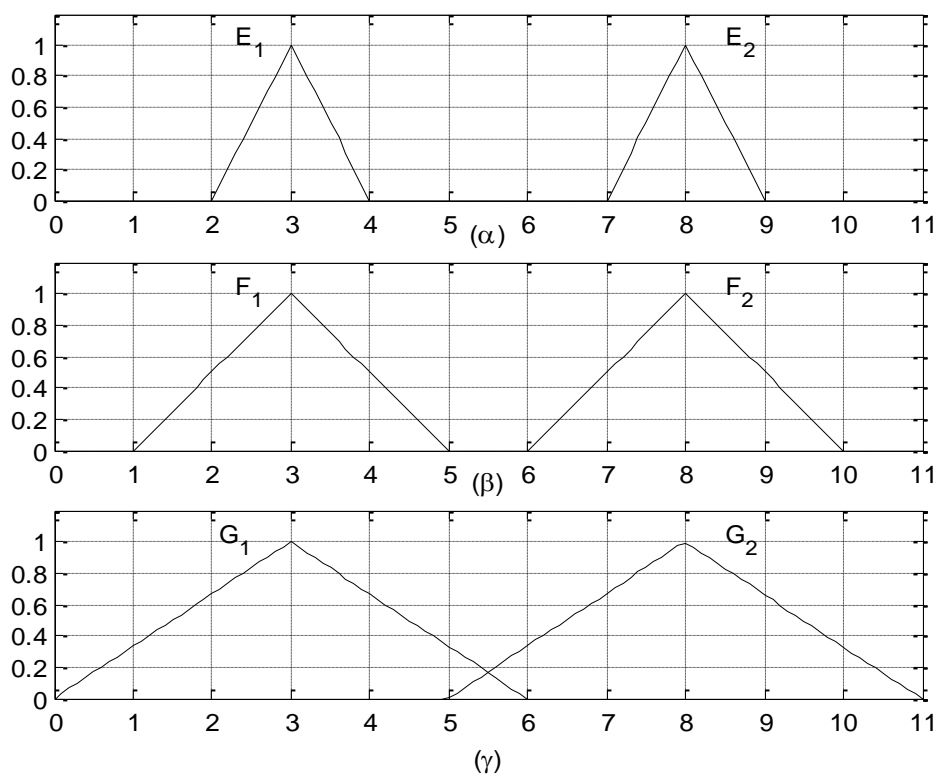
Συγκεκριμένα, η συνάρτηση του ΑΔ E_1 είναι $e_1(x) = \begin{cases} x-2, & \text{αν } 2 \leq x \leq 3 \\ -x+4, & \text{αν } 3 \leq x \leq 4, \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$ του ΑΔ E_2

είναι $e_2(x) = \begin{cases} x-7, & \text{αν } 7 \leq x \leq 8 \\ -x+9, & \text{αν } 8 \leq x \leq 9, \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$ του ΑΔ F_1 είναι $f_1(x) = \begin{cases} 0.5x-0.5, & \text{αν } 1 \leq x \leq 3 \\ -0.5x+2.5, & \text{αν } 3 \leq x \leq 5, \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$

του ΑΔ F_2 είναι $f_2(x) = \begin{cases} 0.5x-3, & \text{αν } 6 \leq x \leq 8 \\ -0.5x+5, & \text{αν } 8 \leq x \leq 10, \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$ του ΑΔ G_1 είναι

$g_1(x) = \begin{cases} 0.334x, & \text{αν } 0 \leq x \leq 3 \\ -0.334x+2, & \text{αν } 3 \leq x \leq 6, \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$ και του ΑΔ G_2 είναι

$g_2(x) = \begin{cases} 0.334x-1.667 & \text{αν } 5 \leq x \leq 8 \\ -0.334x+3.667 & \text{αν } 8 \leq x \leq 11. \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$



Σχήμα Α.3 ΑΔ με συναρτήσεις βαθμού συμμετοχής σχήματος ισοσκελών τριγώνων.

Για $(E_1)_h = [a_h, b_h]$ και $(E_2)_h = [c_h, d_h]$ υπολογίστηκαν $a_h = h + 2$, $b_h = 4 - h$, $c_h = h + 7$, $d_h = 9 - h$. Για $(F_1)_h = [a_h, b_h]$ και $(F_2)_h = [c_h, d_h]$ υπολογίστηκαν $a_h = 2h + 1$, $b_h = 5 - 2h$, $c_h = 2h + 6$, $d_h = 10 - 2h$. Για $(G_1)_h = [a_h, b_h]$ και $(G_2)_h = [c_h, d_h]$ υπολογίστηκαν $a_h = 3h$, $b_h = 6 - 3h$, $c_h = 3h + 5$, $d_h = 11 - 3h$.

Στη συνέχεια υπολογίζονται μετρικές αποστάσεις καθώς και βαθμοί διάταξης για διάφορες επιλογές των συναρτήσεων $\theta(\cdot)$ και $\nu(\cdot)$.

Πρώτον, στο πλήρες πλέγμα $(\mathbb{L} = [0, 11], \leq)$, έστω ότι επιλέγουμε τις συναρτήσεις $\theta(x) = 11 - x$ και $\nu(x) = x$. Επαληθεύουμε ότι για την συνάρτηση $\theta(\cdot)$ ισχύουν οι δύο απαιτήσεις $\theta(o = 0) = 11 = i$ και $\theta(i = 11) = 0 = o$, ενώ για την συνάρτηση $\nu(\cdot)$ αντίστοιχα

ισχύουν οι δύο απαιτήσεις $v(o=0)=0$ και $v(i=11)=11 < +\infty$. Συνεπώς, για τους ΑΔ E_1 και E_2 προκύπτουν

$$D_1(E_1, E_2) = 0.5 * \int_0^1 10 dh = 5.$$

$$\sigma_\gamma(E_1, E_2) = \int_0^1 \frac{13-2h}{18-2h} dh = \sigma_\gamma(E_2, E_1).$$

Για τον υπολογισμό του προηγούμενου ολοκληρώματος με MATLAB, δημιουργούμε αρχείο `ascii` με όνομα `func.m` και περιεχόμενο

```
function y = func(h)
y = (13 - 2*h)/(18 - 2*h)
```

Κατόπιν, δίνουμε στο Command Window του MATLAB την εντολή

```
quad('func',0,1)
```

Και παίρνουμε το εξής αποτέλεσμα

```
ans =
```

```
0.7055
```

Εξαιτίας της μη-επικάλυψης των ΑΔ E_1 και E_2 προκύπτει $\sigma_\lambda(E_1, E_2) = 0 = \sigma_\lambda(E_2, E_1)$.

Για τους ΑΔ F_1 και F_2 προκύπτουν

$$D_1(F_1, F_2) = 0.5 * \int_0^1 10 dh = 5$$

$$\sigma_\gamma(F_1, F_2) = \int_0^1 \frac{15-4h}{20-4h} dh = \sigma_\gamma(F_2, F_1)$$

Για τον υπολογισμό δημιουργούμε αρχείο `ascii` με όνομα `func.m` και περιεχόμενο

```
function y = func(h)
y = (15 - 4*h)/(20 - 4*h)
```

Κατόπιν, δίνουμε στο Command Window του MATLAB την εντολή

```
quad('func',0,1)
```

Και παίρνουμε το εξής αποτέλεσμα

```
ans =
```

```
0.7211
```

Εξαιτίας της μη-επικάλυψης των ΑΔ F_1 και F_2 προκύπτει $\sigma_\lambda(F_1, F_2) = 0 = \sigma_\lambda(F_2, F_1)$.

Για τους ΑΔ G_1 και G_2 προκύπτουν

$$D_1(G_1, G_2) = 0.5 * \int_0^1 10 dh = 5$$

$$\sigma_\gamma(G_1, G_2) = \int_0^1 \frac{17-6h}{22-6h} dh = \sigma_\gamma(G_2, G_1)$$

Για τον υπολογισμό δημιουργούμε αρχείο ascii με όνομα func.m και περιεχόμενο

```
function y = func(h)
```

```
y = (17 - 6*h)/(22 - 6*h)
```

Κατόπιν, δίνουμε στο Command Window του MATLAB την εντολή

```
quad('func',0,1)
```

Και παίρνουμε το εξής αποτέλεσμα

```
ans =
```

```
0.7346
```

$$\sigma_\lambda(G_1, G_2) = \int_0^{1/6} \frac{12-6h}{17-6h} dh = \sigma_\lambda(G_2, G_1).$$

Για τον υπολογισμό δημιουργούμε αρχείο ascii με όνομα func.m και περιεχόμενο

```
function y = func(h)
```

```
y = (12 - 6*h)/(17 - 6*h)
```

Κατόπιν, δίνουμε στο Command Window του MATLAB την εντολή

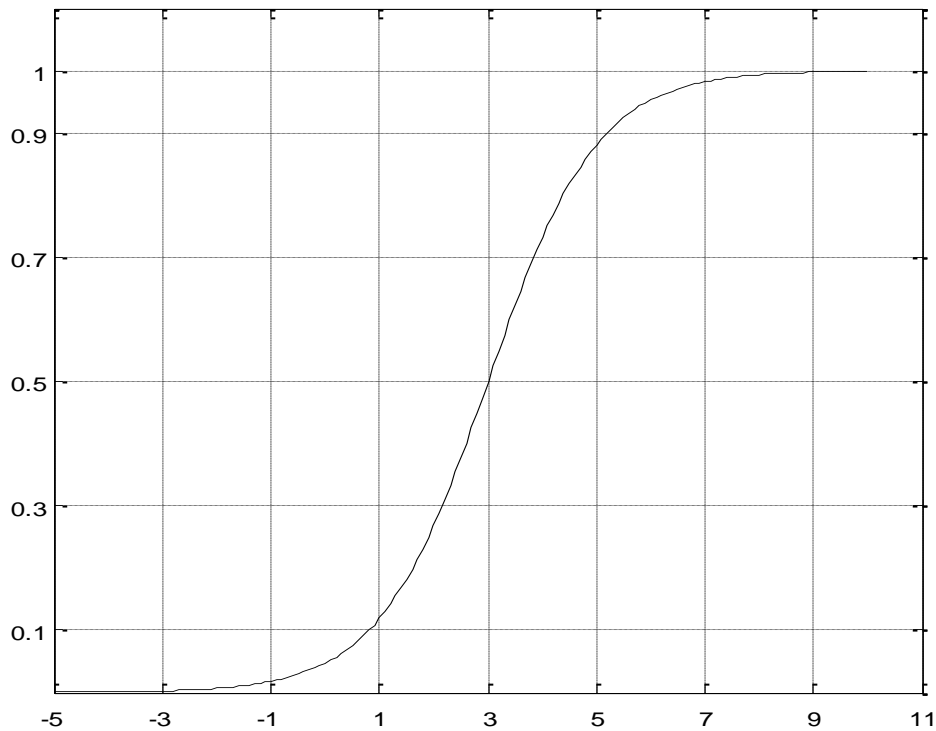
```
quad('func',0,1/6)
```

Και παίρνουμε το εξής αποτέλεσμα

```
ans =
```

```
0.1161
```

Δεύτερον, στο πλήρες πλέγμα $(\bar{\mathbf{R}}, \leq)$, έστω ότι επιλέγουμε τις συναρτήσεις $\theta(x) = -x$ και $\nu(x) = 1/(1 + e^{-(x-3)})$, όπου η τελευταία (σιγμοειδής) συνάρτηση δείχνεται στο Σχήμα Α.4. Επαληθεύουμε ότι για την συνάρτηση $\theta(\cdot)$ ισχύουν οι δύο απαιτήσεις $\theta(o = -\infty) = +\infty = i$ και $\theta(i = +\infty) = -\infty = o$, ενώ για την συνάρτηση $\nu(\cdot)$ αντίστοιχα ισχύουν οι δύο απαιτήσεις $\nu(o = -\infty) = 0$ και $\nu(i = +\infty) = 1 < +\infty$. Συνεπώς, για τους ΑΔ E_1 και E_2 προκύπτουν



Σχήμα Α.4 Η γνησίως αύξουσα (σιγμοειδής) συνάρτηση $v(x) = \frac{1}{1 + e^{-(x-3)}}$.

$$D_1(E_1, E_2) = 0.5 * \int_0^1 \left(\frac{1}{1 + e^{h+5}} - \frac{1}{1 + e^{h+10}} + \frac{1}{1 + e^{h-6}} - \frac{1}{1 + e^{h-1}} \right) dh$$

Για τον υπολογισμό δημιουργούμε αρχείο ascii με όνομα func.m και περιεχόμενο

```
function y = func(h)
```

```
y = 0.5*(1./(1+exp(h+5)) - 1./(1+exp(h+10)) + 1./(1+exp(h-6)) - 1./(1+exp(h-1)))
```

Κατόπιν, δίνουμε στο Command Window του MATLAB την εντολή

```
quad('func',0,1)
```

Και παίρνουμε το εξής αποτέλεσμα

```
ans =
```

```
0.1899
```


$$\sigma_{\gamma}(E_1, E_2) = \int_0^1 \frac{\frac{1}{1+e^{h+10}} + \frac{1}{1+e^{h-6}}}{\frac{1}{1+e^{h+5}} + \frac{1}{1+e^{h-6}}} dh$$

Για τον υπολογισμό δημιουργούμε αρχείο ascii με όνομα func.m και περιεχόμενο

```
function y = func(h)
```

```
y = (1./(1+exp(h+10)) + 1./(1+exp(h-6)))./(1./(1+exp(h+5)) + 1./(1+exp(h-6)))
```

Κατόπιν, δίνουμε στο Command Window του MATLAB την εντολή

```
quad('func',0,1)
```

Και παίρνουμε το εξής αποτέλεσμα

```
ans =
```

```
0.9958
```

$$\sigma_{\gamma}(E_2, E_1) = \int_0^1 \frac{\frac{1}{1+e^{h+5}} + \frac{1}{1+e^{h-1}}}{\frac{1}{1+e^{h+5}} + \frac{1}{1+e^{h-6}}} dh$$

Για τον υπολογισμό δημιουργούμε αρχείο ascii με όνομα func.m και περιεχόμενο

```
function y = func(h)
```

```
y = (1./(1+exp(h+5)) + 1./(1+exp(h-1)))./(1./(1+exp(h+5)) + 1./(1+exp(h-6)))
```

Κατόπιν, δίνουμε στο Command Window του MATLAB την εντολή

```
quad('func',0,1)
```

Και παίρνουμε το εξής αποτέλεσμα

```
ans =
```

```
0.6242
```

Εξαιτίας της μη-επικάλυψης των ΑΔ E_1 και E_2 προκύπτει $\sigma_{\lambda}(E_1, E_2) = 0 = \sigma_{\lambda}(E_2, E_1)$.

Για τους ΑΔ F_1 και F_2 προκύπτουν

$$D_1(F_1, F_2) = 0.5 * \int_0^1 \left(\frac{1}{1+e^{2h+4}} - \frac{1}{1+e^{2h+9}} + \frac{1}{1+e^{2h-7}} - \frac{1}{1+e^{2h-2}} \right) dh$$

Για τον υπολογισμό δημιουργούμε αρχείο ascii με όνομα func.m και περιεχόμενο

```
function y = func(h)
```

```
y = 0.5*(1./(1+exp(2*h+4)) - 1./(1+exp(2*h+9)) + 1./(1+exp(2*h-7)) - 1./(1+exp(2*h-2)))
```

Κατόπιν, δίνουμε στο Command Window του MATLAB την εντολή

```
quad('func',0,1)
```

Και παίρνουμε το εξής αποτέλεσμα

```
ans =
```

```
0.1440
```

$$\sigma_Y(F_1, F_2) = \int_0^1 \frac{\frac{1}{1+e^{2h+9}} + \frac{1}{1+e^{2h-7}}}{\frac{1}{1+e^{2h+4}} + \frac{1}{1+e^{2h-7}}} dh$$

Για τον υπολογισμό δημιουργούμε αρχείο ascii με όνομα func.m και περιεχόμενο

```
function y = func(h)
```

```
y = (1./(1+exp(2*h+9)) + 1./(1+exp(2*h-7)))./(1./(1+exp(2*h+4)) + 1./(1+exp(2*h-7)))
```

Κατόπιν, δίνουμε στο Command Window του MATLAB την εντολή

```
quad('func',0,1)
```

Και παίρνουμε το εξής αποτέλεσμα

```
ans =
```

```
0.9923
```

$$\sigma_Y(F_2, F_1) = \int_0^1 \frac{\frac{1}{1+e^{2h+4}} + \frac{1}{1+e^{2h-3}}}{\frac{1}{1+e^{2h+4}} + \frac{1}{1+e^{2h-7}}} dh$$

Για τον υπολογισμό δημιουργούμε αρχείο ascii με όνομα func.m και περιεχόμενο

```
function y = func(h)
```

```
y = (1./(1+exp(2*h+4)) + 1./(1+exp(2*h-3)))./(1./(1+exp(2*h+4)) + 1./(1+exp(2*h-7)))
```

Κατόπιν, δίνουμε στο Command Window του MATLAB την εντολή

```
quad('func',0,1)
```

Και παίρνουμε το εξής αποτέλεσμα

```
ans =
```

```
0.8709
```

Εξαιτίας της μη-επικάλυψης των ΑΔ F_1 και F_2 προκύπτει $\sigma_\lambda(F_1, F_2) = 0 = \sigma_\lambda(F_2, F_1)$

Για τους ΑΔ G_1 και G_2 προκύπτουν

$$D_1(G_1, G_2) = 0.5 * \int_0^1 \left(\frac{1}{1+e^{3h+3}} - \frac{1}{1+e^{3h+8}} + \frac{1}{1+e^{3h-8}} - \frac{1}{1+e^{3h-3}} \right) dh$$

Για τον υπολογισμό δημιουργούμε αρχείο ascii με όνομα func.m και περιεχόμενο

function y = func(h)

y= 0.5*(1./(1+exp(3*h+3)) - 1./(1+exp(3*h+8)) + 1./(1+exp(3*h-8)) - 1./(1+exp(3*h-3)))

Κατόπιν, δίνουμε στο Command Window του MATLAB την εντολή

quad('func',0,1)

Και παίρνουμε το εξής αποτέλεσμα

ans =

0.1140

$$\sigma_Y(G_1, G_2) = \int_0^1 \frac{\frac{1}{1+e^{3h+8}} + \frac{1}{1+e^{3h-8}}}{\frac{1}{1+e^{3h+3}} + \frac{1}{1+e^{3h-8}}} dh$$

Για τον υπολογισμό δημιουργούμε αρχείο ascii με όνομα func.m και περιεχόμενο

function y = func(h)

y= (1./(1+exp(3*h+8)) + 1./(1+exp(3*h-8)))./(1./(1+exp(3*h+3)) + 1./(1+exp(3*h-8)))

Κατόπιν, δίνουμε στο Command Window του MATLAB την εντολή

quad('func',0,1)

Και παίρνουμε το εξής αποτέλεσμα

ans =

0.9851

$$\sigma_Y(G_2, G_1) = \int_0^1 \frac{\frac{1}{1+e^{3h+3}} + \frac{1}{1+e^{3h-3}}}{\frac{1}{1+e^{3h+3}} + \frac{1}{1+e^{3h-8}}} dh$$

Για τον υπολογισμό δημιουργούμε αρχείο ascii με όνομα func.m και περιεχόμενο

function y = func(h)

y= (1./(1+exp(3*h+3)) + 1./(1+exp(3*h-3)))./(1./(1+exp(3*h+3)) + 1./(1+exp(3*h-8)))

Κατόπιν, δίνουμε στο Command Window του MATLAB την εντολή

quad('func',0,1)

Και παίρνουμε το εξής αποτέλεσμα

ans =

0.7885

$$\sigma_{\lambda}(G_1, G_2) = \int_0^{1/6} \frac{\frac{1}{1+e^{3h+8}} + \frac{1}{1+e^{3h-3}}}{\frac{1}{1+e^{3h+3}} + \frac{1}{1+e^{3h-3}}} dh$$

Για τον υπολογισμό δημιουργούμε αρχείο ascii με όνομα func.m και περιεχόμενο

```
function y = func(h)
```

```
y = (1./(1+exp(3*h+8)) + 1./(1+exp(3*h-3)))./(1./(1+exp(3*h+3)) + 1./(1+exp(3*h-3)))
```

Κατόπιν, δίνουμε στο Command Window του MATLAB την εντολή

```
quad('func',0,1/6)
```

Και παίρνουμε το εξής αποτέλεσμα

ans =

0.1603

$$\sigma_{\lambda}(G_2, G_1) = \int_0^{1/6} \frac{\frac{1}{1+e^{3h+8}} + \frac{1}{1+e^{3h-3}}}{\frac{1}{1+e^{3h+8}} + \frac{1}{1+e^{3h-8}}} dh$$

Για τον υπολογισμό δημιουργούμε αρχείο ascii με όνομα func.m και περιεχόμενο

```
function y = func(h)
```

```
y = (1./(1+exp(3*h+8)) + 1./(1+exp(3*h-3)))./(1./(1+exp(3*h+8)) + 1./(1+exp(3*h-8)))
```

Κατόπιν, δίνουμε στο Command Window του MATLAB την εντολή

```
quad('func',0,1/6)
```

Και παίρνουμε το εξής αποτέλεσμα

ans =

0.1566

Τα παραπάνω παραδείγματα έδειξαν ότι για δύο ΑΔ, έστω F και E , με συμμετρικές (βλ. ισοσκελείς) συναρτήσεις συμμετοχής η απόσταση $D_1(F,E)$ δεν επηρεάζεται με τη μεταβολή του εύρους της βάσης όταν οι συναρτήσεις $\theta(\cdot)$ και $\nu(\cdot)$ είναι γραμμικές. Σε διαφορετική περίπτωση, τόσο η απόσταση $D_1(F,E)$ όσο και βαθμός διάταξης $\sigma(F,E)$ εξαρτώνται από τις συναρτήσεις $\theta(\cdot)$ και $\nu(\cdot)$. Συνεπώς, οι συναρτήσεις $\theta(\cdot)$ και $\nu(\cdot)$ μπορούν να χρησιμεύσουν για την ρύθμιση τόσο της απόστασης $D_1(F,E)$ όσο και του βαθμού διάταξης $\sigma(F,E)$.

Βιβλιογραφία Παραρτήματος Α

- [1] R.A. Fisher, “The use of multiple measurements in taxonomic problems”, *Annals of Eugenics*, vol. 7, no. 2, pp. 179–188, 1936.
- [2] S. Mostapha Kalami Heris, “Yarpiz” (www.yarpiz.com).